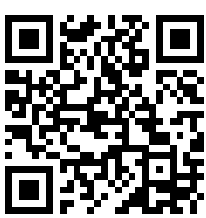
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

BIBLIOTECA NAZIONALE CENTRALE V. E. II
11
Atti Accad.
A
43
ROMA

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

BIBLIOTECA * RIVISTE *

VOL. LXIV, DISP. 1ª, 1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

DISTRIBUZIONE DELLE ADUNANZE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1928-929

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1928 - 18 novembre	1928 - 25 novembre
» - 2 dicembre	» - 9 dicembre
» - 16 »	» - 23 »
» - 30 »	1929 - 6 gennaio
1929 - 13 gennaio	» - 20 »
» - 27 »	» - 3 febbraio
» - 10 febbraio	» - 17 »
» - 24 »	» - 3 marzo
» - 10 marzo	» - 17 »
» - 24 »	» - 7 aprile
» - 14 aprile	» - 28 »
» - 5 maggio	» - 12 maggio
» - 19 »	» - 26 »
» - 9 giugno	» - 16 giugno
» - 23 »	» - 30 »

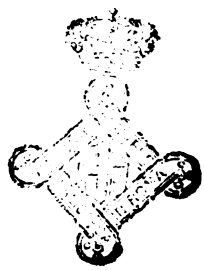
Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO



PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME SESSANTAQUATTRESIMO

1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

Torino — Tipografia Vincenzo Bona.

Digitized by Google

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

al 31 Dicembre 1928

Digitized by Google

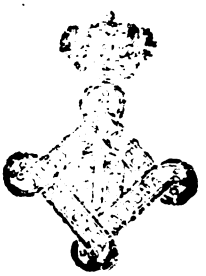
Digitized by Google

PRESIDENTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

dalla sua fondazione



ELEZIONE	PRESIDENTI PERPETUI (*)
1783, 25 luglio	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Giuseppe Angelo). Offrì le dimissioni dalla carica e furono accettate (7 settembre 1788) conferendogli il titolo di *Presidente emerito*.
„ „	**La Grange Tournier** (Giuseppe Luigi), *Onorario*.
1788, 30 novembre	**Morozzo di Bianzé** (conte Carlo Lodovico).
1801, 24 gennaio (4 piovoso a. IX)	**Saluzzo** (cittad. Angelo Giuseppe) ex-conte di Monesiglio.
1801, 15 febbraio	Col Regolamento del 26 piovoso anno IX (15 febbr. 1801) essendosi stabilito che l'Accademia Nazionale rinnovata col *Decreto della Commissione esecutiva del Piemonte* del 22 nevoso anno IX (17 gennaio 1801) non avesse più che due presidenti di classe, cessarono queste funzioni del Saluzzo.
1804, 25 febbraio (5 ventoso a. XII)	**Bonaparte** (Napoleone) primo console della Repubblica Francese, *Onorario*.
1815, 25 novembre	**Balbo di Vinadio** (conte Prospero).
1837, 26 „	**Lascaris di Ventimiglia** (marchese Agostino).
1838, 18 „	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Alessandro).
1851, 18 dicembre	**Plana** (barone Giovanni).
1864, 1° maggio	**Sclopis di Salerano** (conte Federigo).

(*) Dal volume *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche (1783-1883)*. Torino, 1883, pag. 141.

Digitized by Google

ELEZIONE	PRESIDENTI TRIENNALI (*)
1879, 9 marzo	**Ricotti** (Ercole).
1882, 12 febbraio	**Ricotti** (Ercole) rieletto.
1883, 6 maggio	**Fabretti** (Ariodante).
1885, 12 aprile	**Genocchi** (Angelo).
1888, 8 „	**Genocchi** (Angelo) rieletto.
1889, 28 „	**Lessona** (Michele) termina il 2° triennio iniziato dal GENOCCHI.
1891, 24 maggio	**Lessona** (Michele).
1894, 24 giugno	**Lessona** (Michele) rieletto, † 20 luglio 1894.
1895, 13 gennaio	**Carle** (Giuseppe).
1898, 9 „	**Carle** (Giuseppe) rieletto.
1901, 13 „	**Cossa** (Alfonso) † 23 ottobre 1902.
1902, 14 dicembre	**D'Ovidio** (Enrico) termina il triennio iniziato dal COSSA.
1904, 21 febbraio	**D'Ovidio** (Enrico).
1907, 17 marzo	**D'Ovidio** (Enrico) rieletto.
1910, 24 aprile	**Boselli** (Paolo).
1913, 18 maggio	**Boselli** (Paolo) rieletto.
1916, 28 „	**Camerano** (Lorenzo) † 22 novembre 1917.
1918, 3 febbraio	**Naccari** (Andrea) continua il triennio iniziato dal CAMERANO.
1919, 27 aprile	**Naccari** (Andrea) † 2 ottobre 1926.
1922, 7 maggio	**Ruffini** (Francesco).
1925, 3 „	**Ruffini** (Francesco) rieletto.
1928, 22 aprile	**Parona** (C. Fabrizio)

(*) A norma dell'art. 3 dello *Statuto della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, approvato con R. Decreto 2 febbraio 1882, il Presidente dura in carica un triennio e può essere rieletto per un altro triennio.

Digitized by Google

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1928

NB. — *Negli elenchi degli Accademici la prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), Professore stabile di Geologia nella R. Università di Torino, già Rettore della R. Università. Comm. ✻ e ⊞. — *Torino, Via Bonafous, 5.*

Eletto alla carica il 22 aprile 1928 per il triennio dal 20 aprile 1928 al 19 aprile 1931 (R. D. 14 giugno 1928).

VICE-PRESIDENTE

De Sanctis (Gaetano), Professore stabile di Storia antica nella R. Università di Torino, Presidente della Unione Accademica Internazionale, ✻, Gr. Uff. ⊞, Cav. Gr. Cr. del S. M. O. del Santo Sepolcro. — *Torino, Corso Vittorio Em., 44.*

Eletto alla carica il 22 aprile 1928 per il triennio dal 20 aprile 1928 al 19 aprile 1931 (R. D. 14 giugno 1928).

TESORIERE

Panetti (Modesto), Professore stabile di meccanica applicata alle macchine e di Costruzioni Aeronautiche nel R. Politecnico di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✻ e ⊞. — *Corso Peschiera, 30.*

Riel. alla carica il 25 novembre 1928 per il triennio dal 1° luglio 1928 al 30 giugno 1931 (R. D. 1928).

Digitized by Google

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Grassi (Guido), Professore emerito di Elettrotecnica nella R. Scuola d'ingegneria di Torino, Uff. ✱, Comm. ⁂. — *Torino, Via Ettore De Sonnaz, 7.*
Eletto alla carica il 17 giugno 1928 per il triennio dall'11 giugno 1928 al 10 giugno 1931 (R. D. 6 settembre 1928).

Segretario

Repossi (Emilio), Professore stabile di Mineralogia nella R. Università di Torino. — *Torino, Via Cibrario, 61.*
Eletto alla carica il 17 giugno 1928 per il triennio dall'11 giugno 1928 al 10 giugno 1931 (R. D. 6 settembre 1928).

ACCADEMICI RESIDENTI

S. A. R. il Principe Luigi Amedeo di **Savoia**, Duca degli Abruzzi. — *Torino, Via Maria Vittoria, 12.*
6 marzo 1927 – 7 aprile 1927.

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Professore emerito di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✱ e ⁂. — *Torino, Corso Peschiera, 30.*
29 dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Peano (Giuseppe), Professore stabile di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, ✱ e Comm. ⁂ — *Torino, Via Barbaroux, 4.*
25 gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Guidi (Camillo), Professore stabile di Statica grafica e Scienza delle costruzioni, Uff. ✱, Gr. Uff. ⁂. — *Roma, Viale delle Milizie, 16.*
31 maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), *predetto.*
15 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Digitized by Google

Mattirolo (Oreste), Professore stabile di Botanica nella R. Università di Torino, ✱ e Gr. Uff. ⊛, Uff. del Merito agricolo di Francia. — *Torino, Orto Botanico (al Valentino).*

10 marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), *predetto.*

9 febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), Professore stabile di Fisica matematica nella R. Università di Torino, Preside della Facoltà di Scienze, ✱ e Comm. ⊛, — *Corso Vinzaglio, 75.*

5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 20 luglio 1913.

Panetti (Modesto), *predetto.*

24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 27 aprile 1919.

Ponzio (Giacomo), Professore stabile di Chimica generale nella R. Università di Torino, ⊛. — *Torino, Corso Massimo d'Azeglio, 48.*

10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 28 ottobre 1923.

Sacco (Federico), Prof. stabile di Geologia applicata nella R. Scuola d'Ingegneria, Gr. Uff. ⊛. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele II, 18.*

10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 19 maggio 1924.

Majorana (Quirino), Professore stabile di Fisica sperimentale nella R. Università di Bologna, Comm. ✱ e ⊛. — *Bologna, Via Irnerio, 46.*

10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 1° marzo 1925.

Herlitzka (Amedeo), Professore stabile di Fisiologia nella R. Università di Torino, ⊛. — *Torino, Via Pietro Toselli, 1.*

25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Pochettino (Alfredo), Prof stabile di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, ✱ e ⊛. — *Torino, Via Giuria, 1.*

25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Boggio (Tommaso), Prof. stabile di Meccanica superiore nella R. Università di Torino, ✱, Comm. ⊛, Lauréat de l'Académie des sciences de Paris. — *Torino, Via Ottavio Revel, 5.*

17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Garelli (Felice), Prof. di Chimica tecnologica e Direttore della R. Scuola d'ingegneria di Torino, Comm. ⊛. — *Torino, Corso Duca di Genova, 1.*

17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Repossi (Emilio), *predetto.*

22 marzo 1925 - 7 maggio 1925.

Vallauri (G. Carlo), Professore stabile di Elettrotecnica nella R. Scuola d'Ingegneria di Torino.

. . . . . .

Digitized by Google

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Professore stabile di Fisica matematica nella R. Univ. di Roma, ☼, ✱, Gr. Cord. ⊞, Croce di Guerra. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895.

Bertini (Eugenio), Professore emerito della R. Università di Pisa. Uff. ✱, Comm. ⊞. — *Pisa, Lungarno Mediceo, 7.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Pirotta (Pietro Romualdo), già Professore stabile di Fisiologia vegetale nella Università di Roma, ☼. Gr. Uff. ⊞. — *Roma, Via Torfiorenza, 36.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Rosa (Daniele), Professore stabile di Zoologia ed Anatomia comparata nella R. Università di Modena, ⊞. — *Modena, R. Università.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Zambonini (Ferruccio), Professore stabile di Chimica generale nella R. Università di Napoli. — *Napoli, Via Mezzocannone A.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Levi-Civita (Tullio), Professore stabile di Meccanica razionale nella R. Università di Roma, ☼. — *Roma, Via Sardegna, 50.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Cantone (Michele), Professore stabile di Fisica sperimentale nella R. Università di Napoli, ☼, Comm. ⊞. — *Napoli, Via Duomo, 305.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Pierantoni (Umberto), Professore stabile di Zoologia nella R. Università di Napoli. — *Napoli, Galleria Umberto I, 27.*
17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Digitized by Google

ACCADEMICI STRANIERI

Thomson (John Joseph), Professore nella Università di Cambridge. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Rutherford (Sir Ernesto), Professore di Fisica sperimentale nell'Università di Cambridge.
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Hale (Giorgio), Astronomo. — *Pasadena, Mount Wilson Observatory (California).*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Picard (Emilio), Segretario perpetuo per le Scienze matematiche dell'Accademia delle Scienze di Parigi. — *Parigi (6), Quai Conti, 25.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Michelson (Alberto), Professore di Fisica nell'Università di Chicago. — *Chicago, Kimbark Avenue, 5756.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

De Vries (Ugo), della R. Università di Amsterdam.

. . . . .

Termier (Pierre), Professore di Geologia all'École des Mines.

. . . . .

Karman (Theodor von), della Università di Aachen.

. . . . .

Digitized by Google

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 aprile 1898.
Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 giugno 1903.
Enriques (Federico), Prof. nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.
Berzolari (Luigi), Professore nella R. Università di Pavia. — 24 febbr. 1918.
Marcolongo (Roberto), Professore nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Pincherle (Salvatore), Professore nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Severi (Francesco), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Appell (Paul Émile), Professore di Meccanica analitica alla Sorbona, Parigi. — 11 giugno 1922.
Borel (Émile), Professore di Calcolo delle probabilità e di fisica matematica, Parigi. — Id. id.
Loria (Gino), Professore di Geometria superiore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Study (Eduard), Professore di Matematiche nell'Università di Bonn. — Id. id.
Tonelli (Leonida), Professore di Analisi algebrica nella R. Università di Bologna. — 27 maggio 1928.
Vitali (Giuseppe), Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Padova. — Id. id.
Signorini (Antonio), Professore di Fisica matematica nella R. Università di Napoli. — Id. id.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di Edinburg. — 27 maggio 1894.
Boussinesq (Valentino), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nella Università di Parigi. — 15 maggio 1910.
Albenga (Giuseppe), Professore nella R. Università di Torino. — 24 febbraio 1918.
Colonnetti (Gustavo), Professore nel R. Politecnico di Torino, — Id. id.
Maggi (Gian Antonio), Professore nella R. Università di Milano. — Id. id.

Digitized by Google

Mesnager (Agostino). Professore nella Scuola Nazionale dei Ponti e Strade, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 29 dicembre 1918.

Fantoli (Gaudenzio), Professore di Idraulica nel R. Istituto tecnico superiore di Milano. — 11 giugno 1922.

Planck (Max), Professore di Fisica matematica nell'Università di Berlino. — 11 giugno 1922.

Prandtl (Ludwig), Professore di Meccanica applicata nell'Università di Gottinga. — Id. id.

Pistolesi (Enrico), Professore di Meccanica applicata alle macchine nella R. Scuola d'Ingegneria di Pisa. — 27 maggio 1928.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Garbasso (Antonio), Professore nella R. Università di Firenze. — 15 maggio 1910.

Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.

Corbino (Orso Mario), Professore nella R. Università di Roma. — 24 febbraio 1918.

Lombardi (Luigi), Professore nella R. Scuola degli Ingegneri di Roma. — Id. id.

Marconi (Guglielmo), Senatore del Regno, Dottore in scienze, Londra. — Id. id.

Palazzo (Luigi), Direttore del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, Roma. — Id. id.

Rizzo (Giovanni Batt.), Professore di Fisica terrestre nella R. Università di Napoli. — 11 giugno 1922.

Bragg (W. H.), Professore di Fisica nel Collegio Universitario di Londra. — Id. id.

Perrin (Jean), Professore di Chimica-fisica alla Sorbona, Parigi. — Id. id.

Laue (Max von), Professore di Fisica teoretica nell'Università di Berlino. — Id. id.

Amerio (Alessandro), Professore di Fisica sperimentale nel Politecnico di Milano. — Id. id.

Lori (Ferdinando), Professore di Elettrotecnica nella R. Scuola di Ingegneria di Padova. — 27 maggio 1928.

Fermi (Enrico), Professore di Fisica teoretica nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 gennaio 1881.

Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 marzo 1905.

Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.

Digitized by Google

Angeli (Angelo), Professore nella R. Università di Firenze. — 24 febbraio 1918.

Le Chatelier (Enrico Luigi), dell'Istituto di Francia, Parigi. — Id. id.

Nasini (Raffaele), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Bruni (Giuseppe), R. Politecnico di Milano. — 15 giugno 1919.

Blanc (Gian Alberto), Professore di Geochimica nella R. Università di Roma. — 27 maggio 1928.

Parravano (Nicola), Professore di Chimica inorganica nella R. Università di Roma. — Id. id.

Pellizzari (Guido), Professore di Chimica farmaceutica nella R. Università di Firenze. — Id. id.

Rolla (Luigi), Professore di Chimica inorganica nella R. Università di Firenze. — Id. id.

Betti (Mario), Professore di Chimica generale nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 marzo 1905.

Suess (Franc. Edoardo), Professore nella " Deutsche Technische Hochschule, di Praga. - Landesgerichtsstrasse 12, Vienna 1. — Id. id.

Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.

Dal Piaz (Giorgio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Day (Arturo L.), Direttore del Laboratorio geo-fisico dell'Istituzione Carnegie, Washington, D. C. — 11 giugno 1922.

Washington (Enrico Stefano), Laboratorio geo-fisico di Washington. — Id. id.

Franchi (Secondo), Ingegnere, Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.

Gortani (Michele), Professore di Geologia nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Novarese (Vittorio), Ingegnere, Professore; Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.

Rovereto (Gaetano), Professore di Geologia nella R. Università di Genova. — 27 maggio 1928.

Fabiani (Ramiro), Professore di Geologia nella R. Università di Palermo. Id. id.

Millosevich (Federico), Professore di Mineralogia nella R. Università di Roma. — Id. id.

Karpinsky (Alessandro), Presidente dell'Accademia delle Scienze V. R. SS. Leningrado. — Id. id.

Colomba (Luigi), Professore di Mineralogia nella R. Università di Genova. — Id. id.

Digitized by Google

Boeris (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Douvillé (Henry), Membro dell'Istituto di Francia. — Id. id.

Depéret (Charles), Professore di Geologia nella Università di Lione. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.

Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.

Mangin (Luigi), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.

Bower (Federico Orpen), Professore nella Università di Glasgow. — 24 febbraio 1918.

Chodat (Roberto), Professore di Botanica nell'Università di Ginevra. — 25 giugno 1922.

Longo (Biagio), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Pisa. — Id. id.

Gola (Giuseppe), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Padova. — Id. id.

Bois (Desiderato), Professore nel Museo di storia naturale di Parigi. — Id id.

Negri (Giovanni), Professore di Botanica nella R. Università di Firenze. — 27 maggio 1928.

Forti (Achille), *via S.ta Eufemia, 1*, Verona. — Id. id.

Perrot (Émile), Professore e Direttore della Scuola Superiore di Farmacia, *Avenue de l'Observatoire, 4*, Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Boulenger (Giorgio Alberto), Giardino botanico dello Stato, Bruxelles. — 28 gennaio 1900.

Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 giugno 1903.

Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — 5 marzo 1905.

Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell'Università di Madrid. — 15 maggio 1910.

Albertoni (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella Università di Bologna. — 24 febbr. 1918.

Bovero (Alfonso), Professore alla Facoltà di Medicina, S. Paolo del Brasile. — Id. id.

Chiarugi (Giulio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di Perfezionamento di Firenze. — Id. id.

Vialleton (L.), Professore di Anatomia microscopica, Montpellier. — Id. id.

Digitized by Google

Bottazzi (Filippo), Professore di Fisiologia sperimentale nella R. Università di Napoli. — 11 giugno 1922.

Cesaris-Demel (Antonio), Professore di Anatomia patologica nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Gley (E.), Prof. di Biologia generale nel *Collège de France*, Paris. — Id. id.

Richet (Charles), Professore di Fisiologia nell'Università di Parigi. — Id. id.

Sherrington (Ch. S.), Professore di Fisiologia nell'Università di Oxford. — Id. id.

Gallardo (Angel), Professore di Zoologia nella Universitad Nacional di Buenos Ayres. — 27 maggio 1928.

Houssay (Bernardo), Professore di Fisiologia della Medicina nella Universitad Nacional di Buenos Ayres. — Id. id.

Lippschütz (Alejandro), Professore di Fisiologia nella Università di Concepcion (Chile). — Id. id.

Digitized by Google

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Stampini (Ettore), Professore stabile di Letteratura latina nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✱ e Gran Croce e Gran Cordone ⊞. — *Piazza Vittorio Veneto, 10.*

Eletto alla carica il 22 aprile 1928 per il triennio dal 20 aprile 1928 al 19 aprile 1931 (R. D. 14 giugno 1928).

Segretario.

Faggi (Adolfo), Professore stabile di Storia della filosofia nella R. Università di Torino, Comm. ⊞. — *Torino, Via Vassalli Eandi, 3.*

Eletto alla carica il 22 aprile 1928 per il triennio 20 aprile 1928 al 19 aprile 1931 (R. D. 14 giugno 1928).

ACCADEMICI RESIDENTI

Boselli (S. E. Paolo), Senatore del Regno, Socio effettivo dei Lincei, Primo Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano, ecc., Cav. Ordine Supr. SS. Annunziata, ⊕, Gr. Cord. ✱ e ⊞. — *Torino, Piazza Maria Teresa, 3.*

15 gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

De Sanctis (Gaetano), *predetto.*

21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), Senatore del Regno, Professore stabile di Diritto ecclesiastico nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Grand'Uff. ✱ e ⊞. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. — Pensionato 19 giugno 1913.

Stampini (Ettore), *predetto.*

20 maggio 1906 - 7 giugno 1906. — Pensionato 24 gennaio 1915.

Brondi (Vittorio), Senatore del Regno, Professore stabile di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore della P. I., Gr. Uff. ✱ e ⊞. — *Torino, Via Montebello, 26.*

17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907. — Pensionato 4 febbraio 1917.

Digitized by Google

Einaudi (Luigi), Senatore del Regno, Professore stabile di Scienza delle finanze e Diritto finanziario nella R. Università di Torino, Comm. ☞. — *Torino, Via La Marmora, 60.*

10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. — Pensionato 13 dicembre 1917.

Patetta (Federico), Professore stabile di Storia del Diritto italiano nella R. Università di Torino, ✱, Comm. ☞. — *Via S. Massimo, 44.*

3 maggio 1914 - 11 giugno 1914. — Pensionato 27 ottobre 1918.

Vidari (Giovanni), Professore stabile di Pedagogia nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✱ e ☞. — *Torino, Via Valeggio, 15.*

31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 23 febbraio 1920.

Cian (Vittorio), Professore stabile di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Comm. ☞. — *Piazza Statuto, 4.*

20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 2 ottobre 1922.

Pacchioni (Giovanni), Professore stabile di Diritto civile nella R. Università di Milano, ☞. — *Milano* (33), *Via Fratelli Bronzetti, 28.*

20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 7 ottobre 1923.

Faggi (Adolfo), *predetto.*

18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920. — Pensionato, 3 ottobre 1926.

Luzio (Alessandro), Sovrintendente del R. Archivio di Stato di Torino, ✱, Comm. ☞. — *Via Principe Tommaso, 4.*

18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920. — Pensionato 15 febbraio 1928.

Mosca (Gaetano), Senatore del Regno, Professore stabile di Storia delle istituzioni e delle dottrine politiche nella R. Università di Roma, Comm. ✱, Gr. Uff. ☞. — *Roma (36), Via Piero Antonio Micheli, 18.*

18 gennaio 1920 — 12 febbraio 1920.

Jannaccone (Pasquale), Professore stabile di Statistica nella R. Università di Torino, Comm. ☞. — *Torino, Via Principe Tommaso, 39.*

28 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

Solari (Gioele), Professore stabile di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino. — *Torino, Via Maria Vittoria, 3.*

23 dicembre 1923 - 24 gennaio 1924.

Bertoni (Giulio), Professore stabile di Filologia romanza, Comm. ☞. — *Roma, R. Università.*

31 gennaio 1926 - 21 febbraio 1926.

Rondolino (Ferdinando), Dottore di leggi. — *Torino, Via Bogino, 16.*

31 gennaio 1926 - 21 febbraio 1926.

Digitized by Google

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Professore stabile di Diritto romano nella R. Università di Roma, ⊜, Gr. Cr. ❋ e ⊞. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Senatore del Regno, Professore emerito di Lingue e Letterature neo-latine nella R. Università di Firenze, ⊜, Gr. Uff. ❋ e ⊞. — *Firenze (22), Piazza d'Azeglio, 13.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Guidi (Ignazio), Senatore del Regno, Professore emerito di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, ⊜, Uff. ❋, Gr. Uff. ⊞, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Sabbadini (Remigio), Professore emerito di Lingua e Letteratura latina nella R. Università di Milano, Comm. ⊞. — *Pisa, Via Fibonacci, 19.*
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Salandra (S. E. Antonio), Deputato al Parlamento, Professore stabile di Diritto amministrativo nella R. Università di Roma, Socio straniero dell'Istituto di Francia, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di scienze morali e politiche e dell'Accademia Pontaniana di Napoli. Cavaliere dell'Ordine supremo della SS. Annunziata, ⊜, Gr. Cr. ❋ e ⊞, ecc. — *Roma, Via Girolamo Fracastoro, 7.*
22 dicembre 1918 - 12 gennaio 1919.

Fedele S. E. Pietro), Senatore del Regno, Prof. stabile di Storia moderna nella Università di Roma, Uff. ❋ e Gran Cordone ⊞. — *Roma (102), Via C. Linneo, 38.* — 6 maggio 1928...

Digitized by Google

ACCADEMICI STRANIERI

Nolhac (Pietro de), Professore nell'École pratique des Hautes Études di Parigi.
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Hauvette (Enrico), Professore di Lingua e Letteratura italiana alla Sorbona, Parigi.
28 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nella Scuola Politecnica di Parigi. — 15 marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Senatore del Regno, Professore emerito della R. Università di Napoli. — Id. id.
Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.
Gentile (Giovanni), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 maggio 1914.
Martinetti (Pietro), Prof. nella R. Università di Milano. — Id. id.
Bergson (Enrico Luigi), Membro dell'Istituto di Francia. — Id. id.
Varisco (Bernardino), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.
Brandileone (Francesco), Professore nella R. Università di Roma. — 10 giugno 1906.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Montalcini (Camillo), Prof., Segretario generale degli uffizi amministrativi della Camera dei Deputati. — 17 maggio 1914.

Digitized by Google

Ranelletti (Oreste), Professore nella R. Univ. di Milano. — 23 giugno 1918.
Romano (Santi), Primo Presidente del Consiglio di Stato. — *Roma, Palazzo Spada.* — 28 maggio 1922.
Sella (Emanuele), Professore di Economia politica nella R. Università di Genova. — Id. id.
Dallari (Gino), Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Scienze Storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 marzo 1886.
Venturi (Adolfo), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 31 maggio 1908.
Meyer (Edoardo), Prof. nell'Università di Berlino. — 17 maggio 1914.
Lippi (Silvio), Direttore dell'Archivio di Stato di Cagliari. — Id. id.
Pareti (Luigi), Professore di Storia antica nella R. Università di Firenze. — 28 maggio 1922.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Orsi (Paolo), Dirett. del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 maggio 1908.
Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Halbherr (Federico), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Marucchi (Orazio), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Paribeni (Roberto), Direttore del Museo Nazionale Romano (delle Terme). — Id. id.
Breccia (Evaristo), Direttore del Museo Greco-Romano di Alessandria di Egitto. — 28 maggio 1922.

Sezione di Geografia.

Bertacchi (Cosimo), Prof. nella R. Università di Torino. — 31 maggio 1908.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Nallino (Carlo Alfonso), Professore nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Vacca (Giovanni), Professore di Storia e Geografia dell'Asia orientale nella R. Università di Roma — 28 maggio 1922.
Levi Della Vida (Samuele Giorgio), Professore di Lingue semitiche nella R. Università di Roma. — Id. id.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE
Digitized by Google

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1908.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio alle Querce in Firenze. — Id. id.
Vitelli (Gerolamo), Senatore del Regno, Professore emerito nel R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze. — 31 maggio 1908.
Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Università di Milano. — 26 febbraio 1911.
Rostagno (Enrico), Bibliotecario della Mediceo-Laurenziana di Firenze. — 23 giugno 1918.
Barbi (Michele), Professore nel R. Istituto super. di magist. di Firenze (Taviano Pistoiese). — Id. id.
Galletti (Alfredo), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Scherillo (Michele), Senatore del Regno, Professore di Letteratura italiana presso la Università di Milano. — 28 maggio 1922.
Bassi (Domenico), Direttore dell'officina dei Papiri presso la Biblioteca nazionale di Napoli. — 28 maggio 1922.
Sanesi (Ireneo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Romagnoli (Ettore), Professore di Letteratura greca nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Bignone (Ettore), Professore di Letteratura greca nella R. Università di Palermo. — Id.

Digitized by Google

Mutazioni avvenute nel Corpo Accademico

dal 1° gennaio al 31 dicembre 1928

ELEZIONI

Parona (Carlo Fabrizio), eletto Presidente nell'Adunanza delle Classi Unite del 22 aprile 1928. — Approvata l'elezione con R. D. 14 giugno 1928.

De Sanctis (Gaetano), eletto Vice-Presidente. — Id. id.

Stampini (Ettore), eletto Direttore della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. — Id. id.

Faggi (Adolfo), eletto Segretario della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. — Id. id.

Fedele (Pietro), eletto Accademico nazionale non residente nell'Adunanza del 6 maggio 1928, della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche ed approvata l'elezione con R. D....

Giacosa (Piero) . . .
Vallauri (G. C. . . .
Eletti Accademici nazionali residenti nell'Adunanza del 27 maggio 1928, della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, ed approvata l'elezione con R. D....

De Vries (Hugo) . . .
Termier (Pierre) . .
Karman von (Teodoro)
Eletti Accademici stranieri nell'Adunanza del 27 maggio 1928, della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, ed approvata l'elezione con R. D....

Grassi (Guido), eletto Direttore della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, nell'Adunanza a Classi Unite del 17 giugno 1928. — R. D. 6 settembre 1928.

Repossi (Emilio), eletto Segretario della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, id., id.

ELETTI SOCI CORRISPONDENTI

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali nell'Adunanza del 27 maggio 1928.

Tonelli Leonida.
Vitali Giuseppe.
Signorini Antonio.
Pistolesi Enrico.
Blanc G. A.
Parravano Nicola.
Pellizzari Guido.
Rolla Luigi.

Digitized by Google

Betti Mario.
Rovereto Gaetano.
Fabiani Ramiro.
Millosevich Federico.
Karpinski Alessandro.
Colomba Luigi.
Boeris Giovanni.
Douvillé Henry.
Depéret Charles.
Negri Giovanni.
Forti Achille.
Perrot Émile.
Lori Ferdinando.
Fermi Enrico.
Gallardo Angel.
Houssay Bernardo.
Lippschütz Alejandro.

MORTI

2 dicembre 1927.

Groth (Paolo Emilio), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche.

4 febbraio 1928.

Lorentz (Enrico), Socio straniero della Classe di Scienze fisiche.

14 febbraio 1928.

Schiaparelli (Ernesto), Accademico residente della Classe di Scienze morali.

7 marzo 1928.

Artini (Ettore), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche.

27 aprile 1928.

Brugnatelli (Luigi), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche.

5 giugno 1928.

Bianchi (Luigi), Accademico nazionale non residente della Classe di Scienze fisiche.

18 agosto 1928.

Prato (Giuseppe), Accademico nazionale residente della Classe di Scienze morali.

17 ottobre 1928.

Giacosa (Piero), Accademico nazionale residente della Classe di Scienze fisiche.

20 ottobre 1928.

Pintti (Arnaldo), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 18 Novembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli e il Segretario Repossi.

Il Presidente apre l'adunanza commemorando brevemente il Socio Prof. Giuseppe Prato, valoroso economista e storico, che fu per sei anni tesoriere della nostra Accademia, morto nello scorso agosto. Ricorda pure brevemente l'illustre Prof. Piero Giacosa, proposto a Socio della Classe di Scienze Fisiche fin dal maggio di quest'anno e morto nell'ottobre. Della commemorazione di entrambi saranno incaricati due Soci delle rispettive classi.

Il Socio Panetti, già condiscepolo del compianto Prof. Prato, si associa con commosse parole alla commemorazione del Presidente.

Il Presidente comunica la notizia della morte del Professore A. Piutti, stabile di Chimica organica nella R. Università di Napoli, nostro Socio corrispondente; ed il Prof. Garelli ricorda ch'Egli ha studiato a Torino, fu assistente del Guareschi e poi dello Schiff, a Firenze; ebbe la cattedra a Sassari e poi

Digitized by Google

a Napoli. Ricorda pure ch'Egli è noto per interessanti ricerche sull'asparagina e su altri capitoli importanti della Chimica organica. Studiò i fenomeni della radio-attività ed i gas nobili nelle rocce italiane e nei gas del Vesuvio. Lascia lavori importanti anche nel campo della Chimica tossicologica, e durante la guerra e dopo cooperò all'impiego della cloropicrina come aggressivo ed alla sua fabbricazione. Era un lavoratore instancabile ed un accurato sperimentatore.

Il Presidente comunica quindi di aver rappresentato l'Accademia alla solenne riunione in cui fu festeggiato recentemente il nostro illustre Socio Guidi in occasione del suo collocamento a riposo per limiti d'età.

Il Presidente annuncia che durante le ferie estive è giunta la conferma Reale della nomina del Segretario della Classe, mentre non ancora giunsero le conferme dei nuovi proposti quali Soci nazionali residenti e non residenti e quali Soci stranieri.

Il Socio Pochettino presenta in seguito in omaggio il ricco volume degli *Studi pubblicati* dalla Università di Torino nel IV Centenario della nascita di Emanuele Filiberto.

Il Socio Garelli presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Prof. L. Mascarelli, dal titolo: *Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati (e dei dinaftili, ecc.). Considerazioni sul grande numero di antipodi ossici privi di atomi asimmetrici, che ne possono derivare,* e la commenta brevemente.

Il Socio Sacco presenta una sua Nota dal titolo: *Nuovi dati di fatto riguardo l'età degli argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino.*

Il Socio Somigliana presenta una propria Nota: *Sulla misura della terra e la gravimetria* e la illustra con brevi parole.

Il Presidente infine presenta, a nome del Socio Guidi, una Nota dell'Ing. R. Zoja, dal titolo: *Nuovo procedimento per studiare le variazioni della resistenza all'urto su barrette intagliate dovute al fenomeno dell'invecchiamento.*

Digitized by Google

Il Socio PANETTI, accennando alla desiderata ripresa della pubblicazione delle *Memorie* dell'Accademia, propone che una parte almeno di queste sia destinata a lavori fatti dai Soci su temi generali proposti dalla Classe.

Il Socio D'OVIDIO si associa alla proposta PANETTI, esprimendo l'avviso che al Direttore di Classe, in accordo coi colleghi, spetti la scelta dei temi e la distribuzione del lavoro.

Sono state inviate in omaggio alla Classe le seguenti opere:

1) G. SCHAEFFER, G. FONTÈS, E. LE BRETON, C. OBERLING, L. THIVOLLE: *Recherches physiologiques sur les levains minéraux à base d'alun*;

2) P. Alfonso WENGER: *A experiencia de Michelson*;

3) T. TOMMASINA: *La physique de la gravitation et la dynamique de l'univers*;

4) E. CIANI: *Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici*;

5) A. FORTI: Opuscoli varî.

Digitized by Google

LETTURE

Sulla misura della Terra e la gravimetria.

Nota del Socio C. SOMIGLIANA

In una recente pubblicazione il prof. C. Mineo (1) si occupa dell'applicabilità dei metodi gravimetrici alla determinazione della forma e delle dimensioni della Terra, e si propone di dimostrarne la inferiorità, o senz'altro la inapplicabilità, dal punto di vista della precisione raggiungibile, rispetto ai metodi diretti geometrici.

Effettivamente è cosa naturale, in via generica, che i metodi diretti siano preferibili agli indiretti, e che quindi anche in questo caso colle misure di gravità meno facilmente si possa arrivare allo scopo, che non misurando archi sulla superficie terrestre. Soltanto i metodi indiretti possono talvolta essere più comodi, o meno costosi, e quindi degni per altro verso di considerazione.

Senonchè, nel calore della dimostrazione, l'autore dello scritto in parola lancia qualche colpo, non meritato, contro la parte teorica ed anche storica della quistione. Sicchè ritengo sia utile rimettere le cose nella luce che mi sembra essere la più giusta ed al posto che appare il più conveniente. E sono d'altra parte lieto dell'occasione che mi si presenta per un chiarimento generale di tutta la quistione.

Il prof. Mineo, a pag. 5 del suo lavoro, scrive: ...*quando si dice che le misure di gravità non possono portare che alla determinazione della forma dell'ellissoide terrestre e non mai alla*

(1) C. Mineo, *Forma e grandezza della Terra e misure di gravità*, "Atti della R. Accad. di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo „, vol. XV, 1928.

Digitized by Google

determinazione delle sue dimensioni assolute, in pratica s'intende dire un'altra cosa.

Poichè i valori di g devono essere misurati e le misure vanno soggette a inevitabili errori, il problema pratico sta nel vedere con quale approssimazione possano essere determinate le costanti incognite da un sistema di equazioni particolari.

Sicchè, pur prescindendo dal fatto un po' strano che si dica una cosa per intenderne un'altra, chi legge questi periodi è naturalmente indotto a pensare che nel campo della geodesia siasi sempre saputo che mediante i valori della gravità era possibile determinare i valori assoluti delle costanti dell'ellissoide terrestre, ma che non se ne tenne mai conto, perchè era parimenti noto che tale metodo non può condurre a risultati praticamente attendibili.

Ora l'autore non dice dove o quando concetti di questa specie siano stati esplicitamente espressi. E non è facile d'altronde conoscere l'opinione di tutti i cultori della geodesia; ma da parte mia debbo dire che ho sempre trovato espresso esattamente il contrario, cioè ho sempre trovato l'affermazione precisa di una impossibilità assoluta o intrinseca, e non mai relativa o pratica, di arrivare alla determinazione delle costanti terrestri mediante misure di gravità (1). Per questo mi è sembrato utile indagare se tale modo di vedere fosse giustificato ed ho trovato infatti che non lo era.

Io potrei fare molte citazioni a sostegno di quanto ho detto, ma, per non dilungarmi, prenderò un trattato recentissimo, credo l'ultimo che sia stato pubblicato e che dovrebbe quindi rispecchiare l'opinione corrente nel momento attuale fra gli studiosi di geodesia. È il *Cours d'astronomie et de géodésie* di H. Faye, *revu et mis à jour* par le Général R. Bourgeois,

(1) Fa apparentemente eccezione un'osservazione del Poincaré in principio della Memoria: *Les mesures de gravité et la géodésie* (" Bull. astron. ,, t. XVIII, 1901). Ma il Poincaré in questo lavoro considera il caso in cui sono noti infiniti valori della gravità, o piuttosto i valori della gravità su tutta una regione della superficie. È quindi un problema completamente diverso dal nostro, nel quale si tratta sempre di un numero *finito* di valori della gravità.

Digitized by Google

Membre de l'Institut. Nel secondo fascicolo della Parte prima, che porta la data del 1928, a pag. 153 si legge:

Mais il faut bien remarquer que si, comme nous l'avons vu précédemment, un ensemble de mesures d'arcs de méridien, d'amplitude et de longueur connues, exécutées dans diverses régions, permet de déterminer les dimensions de l'ellipsoïde terrestre, on ne pourra, par les déterminations de l'intensité de la pesanteur, obtenir que l'aplatissement μ, *c'est-à-dire la figure de l'ellipsoïde de référence, mais non ses dimensions.*

In questo periodo, e nemmeno nei successivi, non vi è accenno alcuno a difficoltà d'ordine pratico o sperimentale. L'impossibilità di cui si parla è affermata in via assoluta.

Non altrimenti si esprime il generale G. Perrier, segretario del Comitato internazionale geodetico e geofisico, in uno scritto che ho già avuto occasione di citare: *Les raisons géodésiques de l'isostasie terrestre* (Annuaire pour l'an 1926, publié par le Bureau des Longitudes).

Ma importa notare che in queste affermazioni l'autorità, pur grande, degli scrittori è fuori quistione; e nemmeno si può parlare di incertezze di interpretazione, per il fatto che tali affermazioni *sono una conseguenza necessaria* delle premesse, cioè delle formole che quegli autori considerano. Per cui chi ha asserito l'impossibilità assoluta, di cui parliamo, non poteva necessariamente asserire, nè pensare altra cosa.

E di fatti le formole che hanno presenti i trattatisti, quando parlano delle applicazioni delle misure di gravità, sono le più semplici fra quelle che si conoscano e le più antiche, cioè quelle di Clairaut classiche:

$$\frac{g_p - g_e}{g_e} + s = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_e}, \qquad g = g_e + (g_p - g_e)\,\mathrm{sen}^2\varphi\,,$$

dalle quali deriva subito la formola più solitamente considerata per rappresentare la gravità sulla superficie dell'ellissoide

$$g = g_e\left\{1 + \left(\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_e} - s\right)\mathrm{sen}^2\varphi\right\}.$$

Ora notiamo bene che, se noi in questa formola sostituiamo g

Digitized by Google

e φ con quante coppie vogliamo di valori osservati, potremo scrivere centinaia di equazioni, ma da esse non potremo mai ricavare altro che un valore, più o meno esatto, per la differenza:

$$\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_e} - s$$

e *non mai i valori di* a *ed* s *separatamente.*

La risolubilità generica delle equazioni di cui parla il professore Mineo nel n. 1 del suo scritto, proprio in questo caso, che è quello in questione, fa completamente difetto.

Dunque la conclusione che mediante misure di gravità non è possibile arrivare alla determinazione assoluta degli assi dell'ellissoide di riferimento, è una vera e propria necessità logica *nelle condizioni di fatto* che abbiamo indicato, e non ha relazione alcuna colla difficoltà pratica delle misure, come scrive il nostro autore. Di questa altra difficoltà si potrà bensì trattare, ma in un secondo tempo.

Io credo quindi di poter dire che, dimostrando il contrario di quanto era stato finora asserito, mediante formole più generali di quelle solitamente applicate, ho contribuito ad eliminare un concetto inesatto, frequentemente ripetuto, ed è questo lo scopo primo che mi ero proposto e che ho raggiunto.

Siamo ora in grado di veder bene come le cose sono avvenute. Quando si usano formole approssimate per fare su di esse dei ragionamenti, sono possibili incongruenze come quella in discorso, per il fatto che, trascurando dei termini, veniamo ad alterare il carattere analitico delle formole e quindi è possibile arrivare a conclusioni che non sono affatto vere per le relazioni rigorose.

Fu dunque, se si vuole, un equivoco. Ma un equivoco che durava dai tempi di Clairaut. Possiamo perciò rallegrarci di averlo ora definitivamente eliminato, e di poter porre al suo posto un teorema di non comune eleganza.

Lo scritto, di cui ci occupiamo, tratta in seguito della precisione raggiungibile nella valutazione degli assi dell'ellissoide mediante misure di gravità, e dimostra, col calcolo dei presumibili errori medi, che essa è insufficiente.

Digitized by Google

Io ho sempre pensato (ed ho detto anche esplicitamente nella mia Comunicazione alla Assemblea di Praga del 1927, che si sta ora stampando nel *Bulletin géodésique*) che una tale quistione doveva essere trattata a parte ed all'infuori della quistione analitica, della quale esclusivamente mi occupavo. Ma una considerazione assai semplice ed intuitiva, senza necessità di calcoli, mi aveva da tempo portato ad una conclusione non differente sostanzialmente da quella sopraccennata. È chiaro infatti che per poter determinare delle lunghezze, come sono gli assi dell'ellissoide terrestre, è necessario misurare delle grandezze che dipendano in qualche modo dalla unità di lunghezza. Queste grandezze sono nel nostro caso le accelerazioni di gravità, nelle quali, *dato il metodo attualmente usato per misurarle*, l'unità di lunghezza compare nella misura delle lunghezze dei pendoli. Per cui in ultima analisi possiamo dire che usiamo come *base* per misurare delle lunghezze di migliaia di chilometri l'asta di un pendolo lunga appena qualche decimetro. E ciò è naturalmente ben contrario alle buone regole della topografia.

Siamo quindi su questo punto d'accordo. Ma l'accordo cessa quando l'autore chiama paradosso la determinabilità degli assi mediante misure di gravità.

Si tratta di un teorema dimostrato con ogni rigore. E se anche esso si mostra ora non adatto allo scopo indicato, a cagione dei metodi che ora si adoperano per misurare la gravità, nessuno può escludere che lo possa divenire in seguito, con altri e differenti metodi di misura. Esistono in natura infiniti fenomeni che dipendono dalla gravità, oltre alle oscillazioni dei pendoli: chi può escludere che se ne possa trovare uno pel quale la difficoltà indicata debba scomparire? (1), chi può escludere che la precisione delle misure di gravità possa essere spinta assai più oltre di quella attualmente raggiunta?

Ma, indipendentemente da tutto ciò, conviene ricordare che

(1) Per citare un esempio, le oscillazioni stazionarie dei grandi laghi sono così lente, che un pendolo ad esse isocrono dovrebbe avere una lunghezza di migliaia di chilometri!

Digitized by Google

le formole non si costruiscono unicamente per mettervi dentro dei numeri e cavarne dei valori, più o meno precisi, per certe grandezze. Le formole e le teorie analitiche servono per studiare le mutue dipendenze fra le grandezze che compaiono in un dato fenomeno e per costruire dei modelli che aiutino la nostra immaginazione nel rappresentarlo.

Sotto questo punto di vista tutte le formole, che noi possiamo logicamente dedurre da una teoria, hanno uguale valore. Ed è perfettamente lecito, anzi doveroso, per chi coltiva la teoria, di preparare formole e teorie analitiche, anche se gli osservatori non hanno presentemente mezzi adatti per servirsene. Spetta a loro il trovarli.

Per ricordare un esempio classico, Maxwell ha costruito le equazioni della propagazione delle onde elettro magnetiche, molto tempo prima che queste fossero sperimentalmente conosciute. Nè alcuno ha mai chiamato paradossali quelle equazioni, che anzi hanno servito di stimolo agli sperimentatori per le più brillanti scoperte.

In un caso, che rientra nella quistione attuale, è facile vedere l'interesse che può avere, sotto altri aspetti, una formola che si presenta come una delle più inadatte alla determinazione del raggio medio terrestre.

È quella citata anche dal nostro autore, a pagina 6, col numero [4]:

$$g_p - g_e = \frac{5}{2}\,\omega^2 R.$$

Se per la differenza $g_p - g_e$ prendiamo il valore attualmente ammesso per la terra, cioè 5,185, troviamo pel raggio medio R un valore errato in meno di circa il 30 %! Ma reciprocamente se ci serviamo della formola stessa per calcolare la differenza fra i valori della gravità al polo ed all'equatore sopra un geoide sferico che abbia un raggio uguale al raggio medio terrestre, troviamo in questo caso un valore molto più grande del precedente, cioè

$$g_p - g_e = 8{,}460,$$

e ciò spiega l'origine dell'errore indicato, e ci porta alla con-

Digitized by Google

clusione assai notevole che la sfera, mentre è figura di grande approssimazione pel geoide dal punto di vista *geometrico,* non lo è dal punto di vista *gravimetrico.* In una mia recente Comunicazione al Congresso dei Matematici a Bologna, ho fatto vedere quale sia la spiegazione meccanica che si può dare di questo fatto singolare.

Passando ad un altro ordine di considerazioni convien notare che dalle relazioni generali relative al campo ellissoidico, che si imperniano sulla geniale teoria del nostro illustre geodeta, il Pizzetti, possono dedursi molte formole interessanti, nelle quali le lunghezze assolute degli assi non compaiono, o sono considerate come note, e che quindi sfuggono alla obiezione di cui ci siamo precedentemente occupati.

Particolarmente la relazione lineare che esiste fra tre valori qualisiansi della gravità e le formole rigorose semplicissime, che rappresentano la gravità superficiale in funzione della latitudine, io sono convinto che, per necessità di cose, presto o tardi, entreranno a far parte del formulario gravimetrico d'uso corrente. Di una di esse anzi, conviene notarlo, anche il prof. Mineo ha già riconosciuto il valore pratico (1). Siamo quindi già sulla buona strada, e giova sperare, poichè, in verità, non esistono ragioni sostanziali di divergenza.

La Fisica matematica è stata accusata di essere talvolta una vuota astrazione, e di restare troppo lontana dai problemi fisici concreti. Ma, pur troppo, se cerca di accostarsi a questi problemi, le può accadere di non trovare migliore accoglienza, come se invadesse un terreno non suo.

Io ho sempre cercato di tenermi lontano dalle astrazioni e di attaccarmi ai problemi della realtà. Perciò mi sono sforzato, per quanto mi fu possibile, di penetrare e comprendere i metodi usati dagli osservatori, e serenamente apprezzarli.

Credo quindi non sia soverchia pretesa il richiedere che, anche dall'altra parte, si faccia altrettanto.

---

(1) C. Mineo. *Sulla gravità superficiale d'un pianeta supposto ellissoidico a tre assi,* " Boll. dell'Unione Mat. ,, aprile 1928.

◆

Digitized by Google

Nuovi dati di fatto
riguardo
L'età degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino.

Nota del Socio nazionale residente FEDERICO SACCO

Sommario. — Premesse (p. 11); dati paleontologici (p. 13); dati tettonici (p. 15); dati litologici (p. 20); dati stratigrafici (p. 23); dati comparativi (p. 26); conclusione (p. 30).

La questione, grave tanto scientificamente quanto praticamente, dell'*età degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino* che da un quarantennio sostengo essere cretacei, mentre essi sono generalmente ritenuti eocenici, fu da me recentemente riassunta in una breve nota, avente appunto tale titolo, pubblicata negli " Atti della R. Acc. Sc. di Torino „ (Vol. LXI-1925), alla quale quindi rimando per brevità (1).

Tale nota originò una Memoria dell'ing. S. Franchi, *La prosecuzione della Zona ad Helminthoida dalle Alpi Marittime all'Appennino Genovese*, ecc. (" R. Acc. Lincei, 6ª, I, 1926), nella quale egli: espose un parallelismo stratigrafico e cronologico fra Liguria occidentale ed orientale che non credo giusto (come spiegherò verso la fine della presente Nota); riespose con grande dialettica (2) le sue precedenti idee sulla posizione ed età, sia degli Argilloscisti ofiolitiferi che egli attribuisce al Priaboniano, sia del *Macigno*, che segna come sottostante a detti Scisti, e presentò sezioni geologiche (Levanto-Mulazzo e Bacino del Serchio), indicate

(1) Ne ho ancora qualche copia che invio a chi la desidera.

(2) Noto però che gli epiteti largitimi dall'ing. Franchi in detta Memoria, cioè di *artificioso, astruso, sragionevole, assurdo, arbitrario, puerile*, ecc., non sono argomenti, ma solo aggettivi di un tipo polemico che non qualifico.

Digitized by Google

come fatte *secondo il prof. Sacco*, segnandovi gli Argillosciti ofiolitiferi come sovrastanti agli Scisti policromi della cosidetta *Scaglia*, ciò che non ho mai immaginato (avendo anzi dimostrato il contrario a pag. 43 della mia sovraccennata Nota del 1925). Per cui con una Nota sopra *La questione dell'età degli Argilloscisti ofiolitiferi...* (" Rend. R. Acc. Lincei „, 6ª, IV, 1926) dovetti scagionarmi da tale erronea interpretazione attribuitami; nello stesso tempo spiegai come la cosidetta *Scaglia senoniana* delle Carte geologiche ufficiali della Toscana sia in realtà una formazione di passaggio tra l'Eocene ed il Cretaceo, segnandola in uno specchietto finale riassuntivo come superiore agli Argilloscisti ofiolitiferi.

Infine in una recente Memoria *Ancora sull'età degli Scisti argillosi ofiolitiferi*, ecc. (" Boll. S. Geol. I. „, XLVI, 1927) il Franchi (1) riaffermò senz'altro le sue precedenti idee (come pure egli fece ultimamente nell'Adunanza di chiusura del XLI° Congresso della Società geol. ital. a Larderello); e presentò modificate le sezioni geologiche della regione di Levanto-Mulazzo e del Bacino del Serchio, segnando gli Scisti ofiolitiferi sia sopra sia sotto la Scaglia; interpretazione che credo ancor più inaccettabile della prima, presentata dal Franchi nella sua Memoria del 1926.

Intanto, proseguendo gli studi ed i rilevamenti geologici nell'Appennino settentrionale, nuovi ed importanti fatti si poterono constatare, sia riguardo all'età di tali *Scisti* (*facies modeniana*, p. p.), *Galestri*, ecc., sia riguardo all'età, connessa e pure dibattuta, della serie arenacea, il cosidetto *Macigno* (*facies etruria* dell'Eocene), ritenuto generalmente molto più antico di detti Scisti ofiolitiferi e dei ben noti *Calcari a Fucoidi* ed *Helmintoidi* (*facies liguriana* dell'Eocene), mentre credo che esso sia non solo molto più giovane di tali Scisti, ma spesso anche più giovane (quando però non ne è eteropico) di detti Calcari.

Per cui parmi opportuno segnalare questi nuovi dati di

(1) Veramente questa Memoria era stata presentata il 6-II-1927 alla R. Acc. Naz. dei Lincei; ma in omaggio alle tradizioni dell'Accademia che non ammette polemiche nel proprio seno, l'ing. Franchi ritirò la Memoria (di cui furono pubblicate solo le conclusioni) e la fece pubblicare poi nel " Boll. della Soc. Geol. It. „.

Digitized by Google

fatto nella speranza che essi servano a sempre meglio rischiarare tali gravi questioni. Ciò d'altra parte credo tanto più necessario di fare perchè, mentre in Italia dette opinioni, sia della creduta eocenicità degli Argilloscisti ofiolitiferi, sia della relativa antichità del *Macigno*, sono diventate quasi tradizionali, dogmatiche, indiscutibili, viceversa parecchi geologi stranieri che vengono a studiare il nostro Appennino senza preconcetti nè dogmatismi di scuole, tenendo soltanto conto dei dati di fatto, non accettano più dette idee; sarebbe quindi bene e decoroso che anche in Italia si considerassero seriamente tali fatti per dedurne le logiche loro conseguenze. Esaminiamoli brevemente.

Anzitutto, siccome per la Cronologia stratigrafica sono fondamentali i **dati paleontologici**, ricordiamo ancora che, quantunque i veri Argilloscisti ofiolitiferi siano, per la loro speciale origine, generalmente poveri di fossili, tuttavia, attraverso un secolo di ricerche, già ne furono raccolti qua e là in cento punti diversi e sono specialmente: Cicadeoidee (*Bennettites*), *Cupressoxylon* e *Araucarioxylon* analoghi a forme cretacee, Radiolarie di tipo mesozoico nei Diaspri (*Radiolariti*), *Calpionelle* di tipo giura-cretacico (1), resti di *Uintacrinus*, centinaia di *Inocerami* (rappresentati da varie specie), svariatissime *Ammoniti* (di generi diversi, come *Hamites*, *Baculites*, *Turrilites*, *Schloenbachia*, *Desmoceras*, *Pachydiscus*, *Acanthoceras*, *Toxoceras*, *Ancyloceras*, ecc.), denti di diverse specie cretacee di Selacidi, numerosi denti di varie specie di *Pticodi*, alcuni resti di *Ittiosauri*! Flora e Fauna della cui caratteristica cretaceità non si può dubitare.

Ultimamente ancora dall'accurato studioso delle Argille scagliose petroleifere dell'Appennino, il dott. Anelli, vi furono raccolti nuovi resti di Ammonite e di *Uintacrinus*. Quest'ultimo

(1) Forme del Giura-Cretaceo segnalate già molti anni fa dallo Steinmann (*Ueber Tiefen absatze d. Ober Jura im Appennin*, 1913) nei Calcari alberesi dell'Appennino sett. assieme con Radiolariti, riferendo egli le formazioni che le inglobano al Titonico e al Cretaceo inferiore; nell'Appennino detto fossile abbonda nei tipici Calcari alberesi ceroidi del Cretaceo pr. d.

Digitized by Google

fossile, analogo a quello che segnalai per lo stesso terreno nel 1922, ha speciale importanza, sia perchè trattasi di un genere finora trovato soltanto nel Cretaceo superiore dell'America Settentrionale e dell'Europa, sia perchè la conservazione (ancora in posizione naturale originaria) di molte decine di dischetti di un delicato, lungo braccio di Crinoide, dolcemente e ondulatamente adagiato sopra una lastra, esclude l'ipotesi di rimaneggiamento avanzata da alcuni per cercare di demolire l'importanza dei fossili cretacei trovati fra gli Scisti ofiolitiferi dell'Appennino.

Infine, circa i fossili degli Argilloscisti in questione è opportuno ricordare che da oltre un quarantennio fu rinvenuto un grande rostro (lungo quasi mezzo metro) di Rettile nel Rio Maràngone affluente del Tresinaro, presso S. Valentino di Castellarano in Provincia di Reggio Emilia; tale fossile proviene (come indica il suo materiale avvolgente) dalla formazione delle Argille scagliose che sviluppansi estesamente, tipiche, spesso rossigne, appunto nell'alta Val Marangone tra il M. Stadola e Remontano (vedi: F. Sacco, *Carta geologica dell'Appennino dell'Emilia*, 1892).

Orbene, sin dal 1886 il prof. Uzielli descrisse tale resto: *Sopra un cranio di Coccodrillo trovato nel Modenese*, " Boll. Soc. geol. it. „, Vol. V), indicandolo come certamente di un *Crocodylus* di grandi dimensioni.

Poco dopo il prof. Capellini esaminava tale fossile, stato esposto nella Mostra emiliana del 1888, e lo ricordava sia nei *Cenni bibliografici sui resti di Coccodrilli fossili in Italia*, indicati nel suo lavoro sul *Coccodrilliano gavialoide di Cagliari* (" Mem. Acc. Lincei „, 4ª, VI, 1890), sia in quello sopra *Ichtyosaurus camplylodon e tronchi di Cycadee nelle argille scagliose dell'Emilia* (" Mem. Acc. Sc. „, Bologna, 4ª, X, 1890), giudicandolo di grande importanza ma non determinandolo, causa il suo stato di conservazione.

Intanto il prof. Zittel nel terzo volume del suo grande *Trattato di Paleontologia* indicava il Coccodrillo del Reggiano come appartenente alla sezione *Brevirostri* degli *Eusuchia*.

In seguito il prof. V. Simonelli in uno studio *Intorno agli avanzi di Coccodrilliano scoperti a San Valentino nel 1886* (" Rend. R. Acc. Lincei „, V, 5, 1896) descrisse meglio questa porzione

Digitized by Google

rostrale del cranio che attribuisce ad un Coccodrilliano avente affinità coi *Plesiosuchus*, come un derivato dai Metriorinchi giurassici, considerandolo come il tipo di un genere nuovo, che denomina *Capelliniosuchus*, specificandolo come *C. mutinensis* ed indicandolo come il più antico Coccodrilliano finora scoperto in Italia, giacchè proviene dalle Argille scagliose che fornirono Pticodi ed Ittiosauri, Ammoniti e Inocerami, cioè tipici fossili del Cretaceo.

Dopo ciò per un buon trentennio il cosidetto Coccodrillo di S. Valentino cadde nell'oblio, anche perchè il fossile originale trovasi in una collezione privata lontana dagli ambienti di studio.

Finalmente il prof. M. Gortani in alcune *Note geologiche sui Colli Bolognesi* (" R. Acc. Sc. ", Bologna, 1897), dopo aver indicato un blocco di calcare a grosse Nummuliti ed Alveoline (che credo provenga da quei lembi di calcare eocenico che spesso sono impigliati o sovrapposti alla formazione delle Argille scagliose) ricorda il *Capelliniosuchus*, di cui potè esaminare un buon modello nel Museo Capellini, e crede poter affermare che *è per me un Dinosauro*.

L'affermazione è molto importante, tanto più che, secondo gentile comunicazione recentissima del Gortani, il prof. Nopcsa osservando detto modello avrebbe confermato tale determinazione.

È quindi desiderabile che il prezioso fossile (il quale dalle incomplete figure ricorda un po' un Mosasauride) venga ristudiato con cura per giungere ad una sicura determinazione; ma ad ogni modo esso è molto interessante per la questione esaminata in questa Nota, indicandoci la presenza, fra le Argille scagliose, di un grande Sauriano di tipo mesozoico, prevalentemente cretaceo.

•

Riguardo ai **dati tettonici** devesi subito osservare che, siccome il motivo tettonico prevalente nell'Appennino settentrionale è il corrugamento a ripetute pieghe isoclinali più o meno coricate (1), ne consegue naturalmente che gli Scisti ofiolitiferi per

(1) Vedi, p. es., le Sezioni pubblicate nelle mie Note sopra: *Le regioni petroleifere dell'Emilia* (" B. S. G. I. ", XLII, 1924); *Nelle regioni petroleifere*

Digitized by Google

metà circa dei casi si immergono sotto e per l'altra metà si avanzano sopra le formazioni dei Calcari a Fucoidi e delle Arenarie; ne deriva che la tettonica non risolve la questione in esame e quindi, secondo l'interpretazione cronologica (direi eocenica o cretacea) che si vuol dare a tali Scisti, essi possono essere interpretati e graficamente rappresentati in modo da costituire sinclinali (come generalmente si usa) oppure anticlinali, come io penso e sempre segnai.

Tuttavia da qualche tempo molti geologi, già accettando gli Scisti ofiolitiferi come più antichi (pur sempre eocenici) dei Calcari a Fucoidi, ammettono i primi costituire anticlinali fra i secondi. Ma permane sempre immutata e ferma l'opinione che la grande formazione arenacea del *Macigno* sia più antica che gli Scisti ofiolitiferi, per cui essa è sempre indicata come formante anticlinali fra detti Scisti che vi giacerebbero in sinclinale.

Orbene in alcuni punti dell'Appennino si possono osservare due fatti che contraddicono chiaramente a tale idea e relativa interpretazione tettonico-cronologica, cioè:

I°. È vero che talora la serie del *Macigno* sembra immergersi sotto gli Scisti ofiolitiferi, sia per reale rovesciamento stratigrafico, sia perchè le gigantesche pressioni orogeniche hanno spinto le tenere e malleabili formazioni argilloscistose contro e sopra le massiccie e compatte formazioni arenacee, in modo quasi da sommergerle più o meno estesamente. Ma in certe regioni, per es. nel gruppo del M. Zatta-M. Ghiffi (tra l'alta Val Taro e la Valle di Borzonasca nel Chiavarese) vediamo che la serie del *Macigno*, ingracilendosi, va infine a costituire solo più strette zone sovrastanti, direi galleggianti sopra gli Scisti ofiolitiferi, mostrando così di costituire sinclinali drizzate, coricate fram-

dell'Appennino (" Le Vie d'Italia ", 1924); *Ricerche di regioni petroleifere nell'App. dell'Emilia* (" Mem. descr. Carta geol. d'Italia ", XX, 1926). Quanto ai giganteschi ricoprimenti supposti da Lencewicz, Steinmann, Tillmann, Kober, ecc., non mi paiono necessari, mentre la Geologia appenninica si spiega assai bene e naturalmente con corrugamenti più o meno rovesciati che spesso si possono anche direttamente constatare.

Digitized by Google

mezzo ed infine, come dissi, anche nettamente sopragiacenti a detti Scisti; la maggior antichità di questi rispetto al *Macigno* risulta quivi evidente, se non si vuol ricorrere a trasgressioni, carreggiamenti e ribaltamenti straordinari contro l'interpretazione più semplice, logica e naturale.

II°. In tanti anni di rilevamento geologico nell'Appennino, tenendo sempre molto conto dei dati tettonici, non mi è mai occorso di osservare direttamente che le formazioni del *Macigno* facciano verso l'alto del loro sviluppo una vera anticlinale, come dovrebbe apparire, almeno qualche volta, se esse costituissero anticlinali fra gli Argilloscisti ofiolitiferi e come generalmente è figurato nelle sezioni teoriche.

Invece più volte ebbi ad osservare il caso contrario, cioè di vere sinclinali nel *Macigno*, naturalmente là dove esso è inciso tanto profondamente da venir raggiunta la parte medio-inferiore di questa formazione arenacea. Ricorderò, come esempio in proposito, la Valle dell'Aveto, confluente di destra della Trebbia. Rilevando la geologia della incassata Valle di Aveto, da Rezoaglio al suo termine, si può notare che la sua parte direi nucleare (dai dintorni di Salsominore sin oltre il Fossone di Torrio) è costituita dalla potente e compatta serie marnoso-arenacea (*Macigno*) in banchi spesso fortemente rialzati, attorno a cui si svolge quasi a collana una più o meno estesa zona di argilloscisti ofiolitiferi (quella di Tornarezza-Colla-Casale, ecc. ad Est, e di Cerignale-Cariseto-Rovereto-Orezzolo, ecc. ad Ovest), intorno ai quali si avvolge a sua volta, quasi come grande, per quanto incompleta, fascia, la formazione dei Calcari a Fucoidi (formante i Monti di Torrio-Rocca Borri, ecc. ad Est, e di M. Oramala-Vico, ecc. ad Ovest); per cui viene spontanea l'idea d'interpretare questa serie come una anticlinale, della quale il *Macigno* sarebbe il nucleo, avvolto regolarmente dagli Scisti ofiolitiferi e poi dai Calcari a Fucoidi. Interpretazione infatti che è quella generalmente adottata, anche perchè successioni stratigrafiche simili o analoghe si incontrano frequentemente nelle regioni del *Macigno* appenninico.

Ma se osserviamo bene la tettonica di questa tipica regione

Digitized by Google

arenacea notiamo che, mentre essa, già nella vicina Valle della Trebbia, lascia vedere varie pieghe a C come terminazione di una sinclinale coricata, nella Valle Aveto mostra nettamente in vari punti la struttura in grande sinclinale, fortemente ristretta per gigantesca pressione orogenica; così, per esempio, quasi di fronte alla Costa Coverera (Fig. 1), e quasi di fronte alla Borgata Boschi

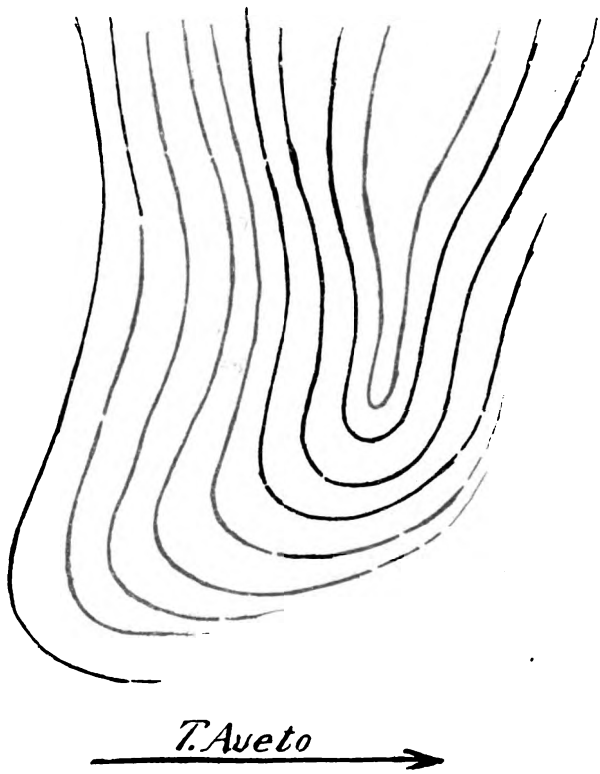


Fig. 1.

Grande sezione naturale nel *Macigno* del versante sinistro di Valle Aveto, di fronte a Costa Coverera.

(Fig. 2) precisamente là dove si eseguisce ora una diga (per Bacino artificiale) che purtroppo verrà a guastare in gran parte la vista della parte bassa di questa magnifica sinclinale. Dunque, malgrado l'apparenza stratigrafica sopraindicata, la formazione arenacea di Valle Aveto corrisponde ad una strettissima sinclinale com-

Digitized by Google

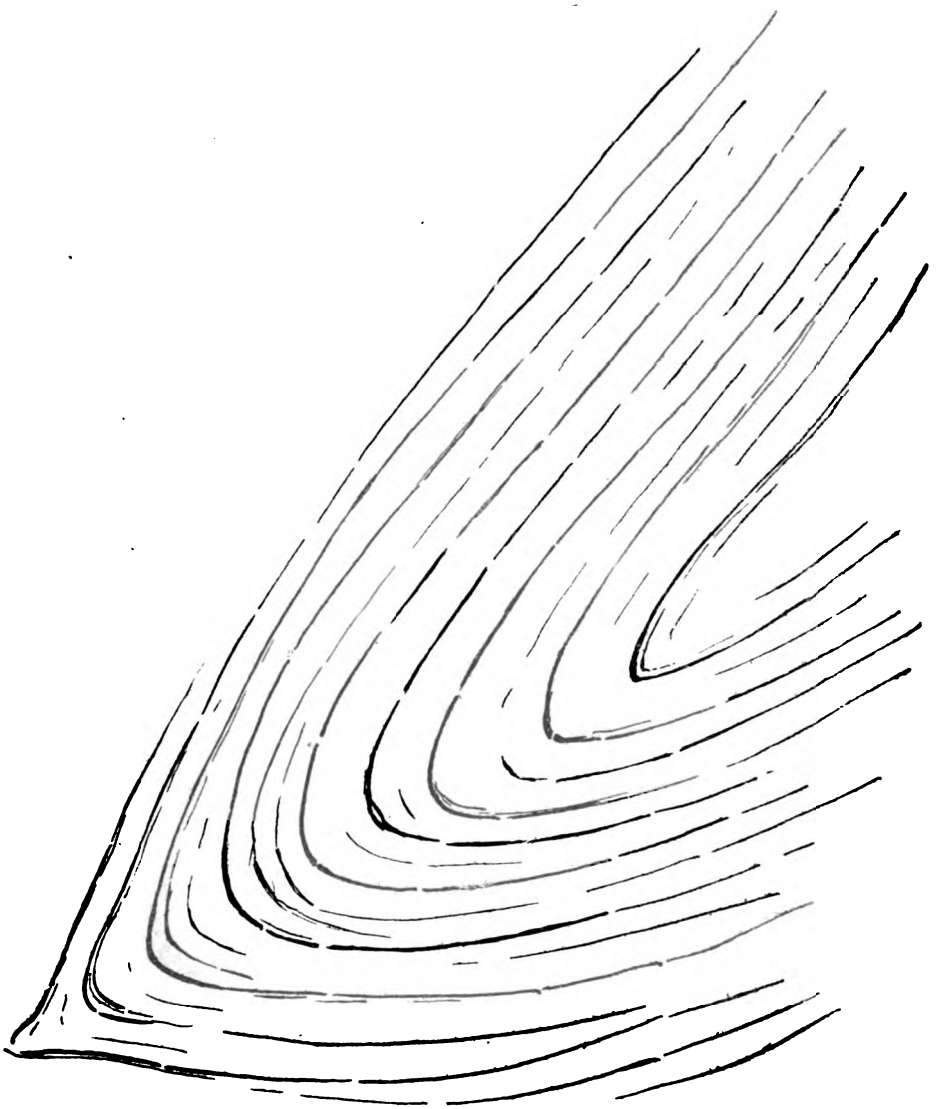


Fig. 2.

Grande sezione naturale nel *Macigno* del fianco sinistro di Valle Aveto, di fronte alla Regione di Borgata Boschi (Schizzo da fotografia).

Digitized by Google

presa e compressa fra zone (che credo anticlinaliche) di Scisti ofiolitiferi e, più esternamente, zone, credo sinclinaliche, di Calcari a Fucoidi.

Interpretazione (già indicata nella Sezione terza della mia Nota sopra *Le Regioni petroleifere dell'Emilia*, 1924) che viene confermata dai dati litologici che indicherò in seguito.

Così pure il fatto che le trivellazioni, profonde anche oltre mille metri, nelle Argille scagliose non hanno ancora incontrato il tipico *Macigno* come altri avrebbe supposto, ha un qualche valore, almeno relativo, se non esclusivo.

I **dati litologici** non vennero finora utilizzati per l'interpretazione cronologica delle formazioni in esame, giacchè esse sono generalmente così micromere da non prestarsi facilmente all'esame pratico dei loro componenti rocciosi.

Fortunatamente però in alcuni punti dell'Appennino la serie arenacea (*Macigno*) presenta lenti o strati di conglomerato che ben si presta a tali osservazioni; il punto migliore è ancora la sovraccennata Valle dell'Aveto dallo sbocco di R. Rufinati alla borgata Boschi; zona tanto più degna di studio perchè estesi tagli fatti recentemente per la viabilità nella parte inferiore di detta Valle (in rapporto alla costruzione di un Serbatoio artificiale sotto la borgata di Boschi) permettono magnificamente l'esame minuto e comodo di tali conglomerati, che, malgrado la speciale asprezza della regione, già avevo potuto osservare nel 1890 e che furono poi studiati particolarmente dal prof. Roccati nella sua Nota sopra *Conglomerati ad elementi cristallini della Valle d'Aveto* (" B. S. G. I. „, XL, 1921).

Orbene, esaminando tali conglomerati ad elementi svariatissimi (da pochi millimetri ad oltre un metro di diametro), si nota anzitutto che esso risulta da due sorta, direi, di materiali rocciosi (1); cioè: I°. da elementi cristallini, direi di *facies alpina*

(1) Il fatto è molto analogo a quello che si osserva nei conglomerati oligo-miocenici della Collina torinese; cioè ad elementi rotolati, cristallini (Gneiss, Graniti, Quarziti, Porfidi, ecc.), di lontana origine alpina, commisti

Digitized by Google

(Gneiss, Micascisti, Granito, Aplite, Quarzo, Quarzite, Diorite, Anfibolite, Scisti cristallini varî, ecc.), più o meno rotolati, ciottoloidi, di origine ignota, ma certamente assai lontana, e II°. da elementi più o meno angolosi, indicanti un'origine più o meno vicina, e costituiti da frequenti Calcari alberesi, da varî Argilloscisti bruni, da qualche Diaspro, Diabase, Eufotide e Serpentina (cioè gli elementi della tipica formazione argilloscistosa ofiolitifera dell'Appennino) ed anche dai noti e caratteristici Calcari a Fucoidi! (Fig. 3).

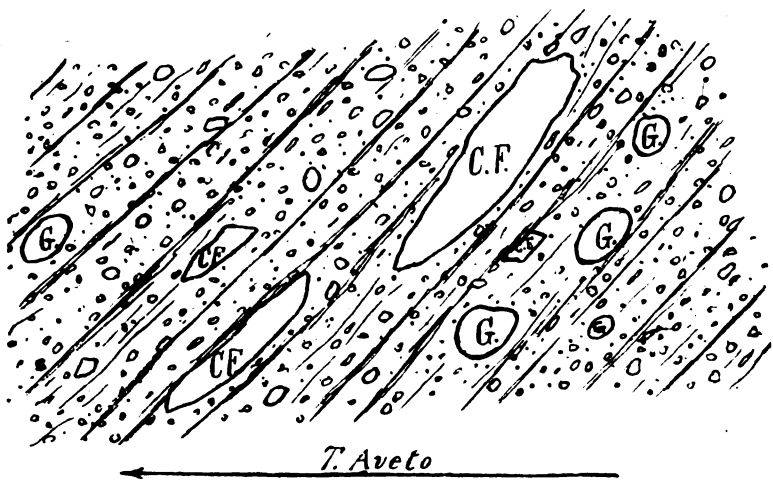


Fig. 3.

Sezione sulla destra del T. Aveto lungo il sentiero sotto Costa Coverera, nel *Macigno* conglomeratico con ciottoli gneissici e granitici (G) commisti a frammenti angolosi (anche di m. 0,70 di lunghezza) di tipico Calcare a Fucoidi (C. F.).

Siccome il fatto mi sembra di capitale importanza, nel caso che qualche geologo volesse constatarlo di persona, preciso che per ora quest'ultimo caso si può osservare specialmente bene nella Costa Coverera, sul fianco dello stradello tagliato nel basso

---

ad elementi angolosi calcarei (calcari alberesi, ecc.) di vicina origine, direi appenninica, per la natura loro; indicandoci che esisteva ivi allora una oroidrografia ben diversa dall'attuale.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

di Valle Aveto, quasi di fronte allo sbocco del T. Pasino, presso un segnale in minio P. F. 21 (caposaldo di rilievo lasciato da ingegneri operatori di una Società idroelettrica). Un pezzo di tali frammenti di Calcare a Fucoidi (colle Fucoidi) è ora conservato nel Museo geologico del Politecnico di Torino col Numero d'Inv. 39173.

Dunque dal fatto esposto risulta evidente la conclusione importantissima che il *Macigno* della Val d'Aveto, come del resto spesso quello dell'Appennino in generale, malgrado possa a primo tratto apparire più antico di certe formazioni circostanti, in realtà è di età posteriore, sia agli Argilloscisti ofiolitiferi, sia, in complesso, ai Calcari a Fucoidi.

Del resto la posizione complessivamente alta delle arenarie si può osservare generalmente dal Veneto alle Alpi Marittime, tanto che alcuni le vollero attribuire già all'Oligocene (vedi, per esempio, estese arenarie dell'Istria, il famoso Grès d'Annot, ecc.).

Ciò non toglie che le arenarie eoceniche dell'Appennino talora appaiano verso il basso della serie eocenica, sia per trasgressioni e *hyatus* e quindi mancanza di gran parte o di tutta la serie media (come vedesi, per es., nell'alta Valle della Stura di Cuneo, nei dintorni di Mentone, in moltissime regioni dell'Appennino settentrionale, ecc.), tanto che alcuni ne costituiscono un orizzonte di *Arenarie inferiori*. Altrove le arenarie sostituiscono in parte (per eteropia) la formazione calcarea a Fucoidi, oppure si alternano ripetutamente con essa, costituendo ciò che alcuni denominarono *Macigno giovane* o *superiore*, come vedesi, ad es., per regioni estesissime dell'alta Emilia tra la zona arenacea dell'Appennino assiale e quella calcarea dell'Appennino medio-marginale, nonchè qua e là in altre regioni, anche nella Liguria occidentale.

Del resto l'età relativamente giovane del *Macigno* appenninico è anche indicata dai fossili che vi si raccolsero, per quanto raramente, qua e là, come, per es., nelle Cave della Porretta (vedi la Nota di Nelli nel 1903), nell'Appennino tosco-romagnolo, ecc. e mostrarono che i resti (spesso solo impronte) di Echinidi, di Molluschi, ecc., in essa contenuti ricordano quasi più le forme neogeniche che non le eogeniche.

Digitized by Google

Riguardo a **dati stratigrafici**, cioè alla successione stratigrafica delle formazioni in questione, si deve anche osservare che in certe regioni, là dove la serie appare più completa, più sviluppata e più regolare, come per esempio nella media e bassa Valle d'Aveto, si può direttamente constatare la seguente graduale e regolare successione stratigrafica, con passaggi litologici quasi insensibili, d'alto in basso:

Eocene:

sup. — Potentissima formazione prevalentemente arenacea (*Macigno*) con intercalazioni marnose e lenti conglomeratiche (dalla regione di Boschi-Castagnola a quella di Cattaragna):

medio — Potentissima formazione essenzialmente marnosa o marnoso-calcarea (da Val Ruffinati a Salsominore);

inf. — Zona marnosa grigia, talora scistoso-friabile, talora con interstrati calcarei, specialmente verso la base (come, p. es., da Villa Sanguineto a Bazzini, ecc.

Cretaceo *sup.* — Argilloscisti spesso contorti, sconvolti, con intercalazioni di *Calcari alberesi* (1) e di spuntoni ofiolitici (per es. nei dintorni della Madonna di Castel Sottano).

Qualcosa di analogo si osserva nella grande e complessa formazione eocenica che, dal suo punto più elevato, si può denominare del M. Ramaceto, specialmente andando dall'alta Valle d'Aveto (dintorni di Cabanne-Rezoaglio) al centro di detta zona, cioè:

Eocene:

sup. — Zona arenacea (*Macigno*) con alternanze scistose (M. Ramaceto - M. Magnano);

medio — Scisti marnoso-calcarei grigi, spesso ardesiaci, lucidi (Alto Aveto nei dintorni di Ventarolo-Parazzuolo);

inf. — Argilloscisti galestrini e Scisti calcarei, ardesiaci grigio-bruni (dintorni di borgata Moglie).

Cretaceo. — Argilloscisti bruni con intercalazioni o frammenti di Calcari alberesi e lenti di Diabasi, Serpentine e grugni calco-ofiolitici vari (dintorni di Cabanne).

(1) Credo che si debbano distinguere, per natura ed età diversa, i *Calcari alberesi* dai *Calcari a Fucoidi* generalmente confusi assieme; cioè come

Digitized by Google

Riguardo ai dati stratigrafici e tettonici è pure qui da ricordare il fatto che in certe regioni dell'Appennino settentrionale la formazione degli Argilloscisti ofiolitiferi appare circondata da quella delle arenarie (*Macigno*).

Tra i casi più tipici e grandiosi su tale riguardo ricordo la regione di Firenzuola dove un'amplissima zona di Argille scagliose tipiche, inglobanti lenti di Diabase e di Serpentina, con Ftaniti, schisti variegati, ecc. (zona in cui si raccolsero già denti di *Ptychodus*, nonchè resti di *Cycadeoidea* e di *Araucarioxylon*), appare circondata, quasi in grandiosa per quanto complessa cupola anticlinalica, dalla solita formazione arenacea del *Macigno*; per cui è quivi difficile negare sia l'età cretacea degli Argilloscisti ofiolitiferi, sia la loro sottoposizione al *Macigno*.

Fatti analoghi osservansi nella regione montuosa di Sesta Godano, ecc.

Quanto a serie stratigrafiche regolari che provano pure un'analoga successione cronologica, accenno qui appena (perchè già esposte nelle pagg. 42-44 della mia sovraindicata Nota del 1925) come in alcune regioni dell'Appennino (per es. in Val di Lima nei monti Lucchesi, alla Foce delle Radici tra la Garfagnana e l'alto Reggiano, ecc.) si possa constatare direttamente la seguente serie:

Potente serie arenacea (*Macigno*)	**Eocene.**
Scisti rossicci o policromi nummulitiferi in alto; con Pticodi verso il basso	
Argilloscisti (*Galestri*), talora ofiolitiferi (come nell'alto Reggiano)	**Cretaceo.**

Calcari alberesi (str.) si potrebbero designare essenzialmente i Calcari argillosi biancastri, a pasta finissima, quasi ceroidi (spesso a *Calpionella*), ottimi per Calce idraulica (sovente con venule bianche spatiche per fratture riempite), che fanno parte della serie argilloso-calcarea formante passaggio dall'Eocene inferiore al Cretaceo, in cui sono specialmente sviluppati e tipici e sono generalmente in lenti od in frammenti. Invece il nome di *Calcari a Fucoidi* si potrebbe riferire specialmente ai Calcari marnosi grigiastri più o meno stratificati, scagliosi, spesso lastroidi-ardesiaci, assai sviluppati nell'Eocene medio e superiore.

Digitized by Google

Ricordo infine ancora che nella nota anticlinale dei monti della Spezia [sviluppantesi regolarmente per oltre 30 Chilometri, coll'affioramento dapprima (presso la Spezia) di tutta la tipica serie mesozoica e poi, gradatamente smorzandosi verso N. O. (oltre Cassana), di solo più la formazione argilloscistosa ofiolitifera], si può in alcuni punti (come per es. presso la borgata Casale, che già descrissi e figurai a pagg. 48-50 della succitata Nota del 1925) osservare chiaramente la seguente serie stratigrafica:

Eocene. — Potente serie arenacea (*Macigno*).
Cretaceo. — Argilloscisti ofiolitiferi.
Neocom.-Giura. — Calcari grigio-rosei.

Tale interessantissima serie stratigrafica, di cui ripresento la sezione (Fig. 4) pel suo grande interesse, è però piuttosto

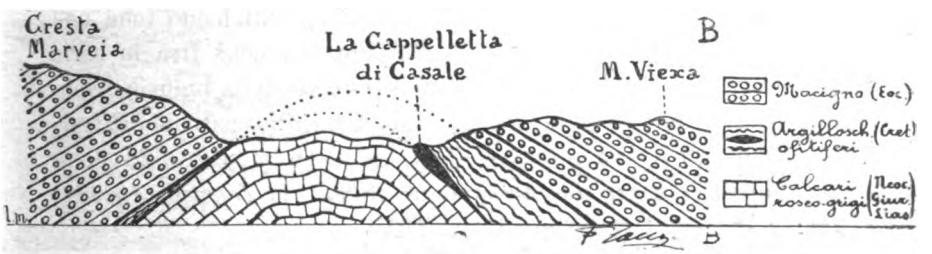


Fig. 4.
Sezione geologica attraverso l'estremità N. O. della grande anticlinale spezzina presso Casale (Pignone). – (Scala di 1 a 25.000).

rara pel semplice fatto che la formazione argilloscistosa in esame, per quanto potente, tuttavia per la natura sua non solo produce facilmente scorrimenti e quindi trasgressioni anche rilevantissime, ma è pure facilissima ad esser schiacciata, laminata e quindi mascherata dai compatti banchi arenacei, tanto più là dove sviluppansi inferiormente i pure rigidi e duri banchi calcarei del Mesozoico tipico; per cui quivi gli Argilloscisti, compresi e compressi fra le due formazioni compatte, non possono generalmente apparire e quindi osservasi quasi normalmente la nota lacuna di trasgressione tra il *Macigno* ed il Neocomiano, lacuna che corrisponde a quasi tutto il Cretaceo (pr. d.).

Digitized by Google

Del resto, se si osserva senza preconcetti la recentissima Carta geologica al 100.000 del foglio Spezia (1928) rilevata dall'ing. Zaccagna, salta nettissimo agli occhi (1) il fatto che la nota anticlinale spezzina di tipico Mesozoico, racchiusa fra due lunghe zone di *Macigno*, abbassandosi verso N. O. lascia apparire: dapprima (fra Neocomiano e *Macigno*, nei dintorni di Pignone-Casale) gli Argilloscisti con Serpentine ed Eufotidi; poi, oltre Cassana, solo più gli Argilloscisti serpentiniferi che rappresentano appunto la terminazione (ridotta al Cretaceo) della lunga anticlinale mesozoica spezzina.

Quanto a **dati comparativi** tra la serie dei terreni di regioni più o meno distanti, essi sono spesso di interpretazione un po' difficile, dubbia e pericolosa nelle deduzioni, per cui ne faccio solo cenno ora, perchè trattovi da una presunta corrispondenza stratigrafica e cronologica con un parallelismo (che non credo accettabile) che fu fatto dall'ing. Franchi (tra la serie stratigrafica della Liguria occidentale e quella della Liguria orientale) per sostenere l'età eocenica degli Argilloscisti ofiolitiferi; idea che egli aveva già accennata nel 1916 a pag. 328 della sua Memoria sopra *Le Arenarie di Annot e la Zona ad Helminthoida* (" Boll. Com. Geol. It. „, XLV).

È noto infatti, per gli studi di vari geologi e specialmente dell'ing. Franchi, che nella Liguria occidentale, là dove più estesa e potente è la serie eocenica, vi si può distinguere la sottosegnata successione stratigrafica (come già ben risulta nella Carta geologica al 400.000 delle Alpi Occidentali, 1908), alla quale il Franchi nei suoi ultimi lavori parallelizza (precisandone l'età nel modo sottosegnato) i terreni della Liguria orientale, cioè:

---

(1) Come pure già appariva chiarissimo nella mia Carta geologica al 100.000 dello "Appennino settentrionale „ pubblicata nel 1891.

Digitized by Google

	Liguria occidentale	Liguria orientale
Priaboniano *sup.*	— Potente zona di arenarie e calcari a Fucoidi ed Helmintoidi (*Zona ad Helminthoida,* di Franchi)	Calcari a Fucoidi ed Helmintoidi.
Priaboniano *inf.*	Zonula di Scisti variegati, rossicci	Argilloscisti ofiolitiferi.
Priaboniano *inf.*	Potente zona di Scisti argillosi, calcarei ed arenacei (*Flysch* di Franchi)	*Macigno.*
Auversiano e **Parisiano.**	— Calcare nummulitico basale	Calcare nummulitico basale.

Orbene, contro tale proposto parallelismo, direi *priaboniano*, (a parte la posizione del *Macigno* di cui già discussi antecedentemente) si oppongono parecchi dati di fatto, di cui cito due fondamentali:

1° Gli Argilloscisti ofiolitiferi della Liguria orientale, se hanno qualche somiglianza col cosidetto *Flysch* della Liguria occidentale, in realtà se ne distinguono nettamente perchè contengono Inocerami, Ammoniti, Pticodi, ecc., mentre che detto *Flysch* contiene lenti calcaree con Nummuliti, Assiline, Ortofragmine, ecc.

2° Anche nell'Emilia e Liguria orientale, là dove la formazione eocenica è ben sviluppata e completa, si osserva pure una serie analoga (compresi gli Scisti variegati) a tutta quella eocenica (detta *Flysch*) della Liguria occidentale; ma è molto *sotto di essa* che compaiono gli Argilloscisti ofiolitiferi.

Così, per esempio, nella Valle dell'Aveto (Bobbiese-Rezoaglio) osservasi la seguente potentissima serie, abbastanza regolare:

Digitized by Google

Eocene:

Grande zona di banchi arenacei (*Macigno*), come in regione Boschi-Castagnola, ecc.).

Zonula di Scisti marnosi variegati, rossicci, tra le arenarie (Vallone di R. Freccio).

Grande zona di Scisti marnosi e arenacei (regione di Salsominore).

Zona di Calcari svariati (Villa Sanguineto-Bazzini, ecc.) che nel vicino Bobbiese presenta Nummuliti, Assiline, Ortofragmine, ecc.

Cretaceo. — Argilloscisti ofiolitiferi (Lagoscuro-Madonna di Castel Sottano).

Così pure, se ci portiamo più ad Est, nell'Appennino Tosco-romagnolo, rivediamo un'analoga potentissima e sviluppatissima serie; per esempio, percorrendo la Val Sieve, malgrado parecchie ondulazioni e varii corrugamenti, si può osservare in complesso la seguente serie:

Eocene:

Potente zona di Scisti marnosi ed arenacei (Monti di S. Godenzo-S. Benedetto).

Zonula di Scisti marnosi variegati, rossicci, tra le arenarie (Sanbavello) (1).

Potente zona di Scisti e strati marnosi ed arenacei (Dicomano-Sanbavello).

Calcari a Fucoidi e Calcari con Nummuliti ed Orbitoidi (Bassa Val della Sieve sino ai dintorni di Dicomano).

Cretaceo. — Argilloscisti a Inocerami, Ammoniti, ecc. (raccolti in quantità dal marchese Strozzi nei dintorni di Pontassieve).

Orbene devesi ben notare che la sovraccennata zonula di Scisti marnosi *variegati* (rossigno-violacescenti) che compare con qualche costanza quasi in mezzo alla serie eocenica dell'Appennino settentrionale, dalle Alpi Marittime alla Toscana, non è da confondersi (2) cogli Scisti rossigni svariati (il cosidetto *Flysch*

(1) Notisi che questa zonula caratteristica si può seguire per una settantina di chilometri dai Monti del Mugello settentr. all'alta Val Tiberina.

(2) Del resto è ben noto come questa *facies* di Scisti variegati compare tante e tante volte attraverso la serie stratosferica dal Cambriano in poi e ne abbiamo diversi casi nello stesso Appennino, sia nel Mesozoico, sia nel Cenozoico.

Digitized by Google

rouge inferiore, *Suessoniano*, ecc.) che si incontrano sovente alla base dell'Eocene e fanno spesso passaggio al Cretaceo. Così, per es. gli *Scisti rossi*, con indizio di trasgressività, che si trovano alla sommità del Cretaceo ed alla base del Nummulitico nella Liguria occidentale (V. foglio al 100.000 di S. Remo, dove essi sono posti dubitativamente nel *Daniano*); così pure gli *Argilloscisti rossigni* (taluni con Pticodi) che appaiono specialmente nella parte superiore degli Scisti ofiolitiferi dell'Appennino settentrionale; così anche gli *Scisti policromi* dei fogli al 100.000 della Toscana pubblicati dall'Ufficio geologico, segnati come *Scaglia*, attribuiti al *Senoniano*, ma colla giusta indicazione che essi racchiudono spesso Calcari nummulitici, ciò che ne precisa la parziale appartenenza all'Eocene inferiore (*Suessoniano*, *Spilecciano* o piani analoghi), mentre che solo la loro parte inferiore, con rari Pticodi, è già riferibile al Cretaceo (*Senoniano* sup.). Salvo che per cretacizzare tutti questi Scisti policromi si accolga il dubbio, espresso dall'ing. Franchi nell'ultima sua Memoria del 1927, che si tratti di Nummuliti preeoceniche; questione delle Nummuliti mesozoiche che pare ben fondata in certi casi, ma che, citata nel caso specifico (cioè di veri banchi nummulitici connessi col *Macigno* dell'Eocene medio-superiore), parmi abbia un valore un po' analogo a quello (opposto) degli Inocerami eocenici, delle Ammoniti eoceniche, dei Pticodi creduti miocenici, degli Ittiosauri designati come Gaviali e simili determinazioni ed indicazioni state proposte per forzatamente eocenizzare gli scisti ofiolitiferi inglobanti fossili assolutamente caratteristici del Cretaceo.

Riassumendo e per ora limitandoci a stabilire la distinzione principale delle contestate formazioni geologiche dell'Appennino, nei grandi piani geologici, credo se ne possa presentare il quadro sintetico generale come è indicato nella pagina seguente.

Digitized by Google

CONCLUSIONE

Dopo tutti i varii dati di fatto, sommariamente sovra esposti, paleontologici (p. 13), tettonici (p. 15), litologici (p. 20), stratigrafici (p. 23) e comparativi (p. 26), posso conchiudere con sempre maggiore sicurezza che la serie geologica completa dell'Appennino settentrionale, per le formazioni in questione, è schematicamente la seguente:

Potente serie comprensiva argilloso-calcareo-arenacea, con *facies* eteropiche o di lateralità, o di alternanza, cioè: ora prevalentemente arenacea (specialmente verso l'alto), costituendo il cosidetto *Etrurio* o *Macigno*; ora prevalentemente calcarea (specialmente verso il basso), costituendo il cosidetto *Ligu*riano o *Calcare a Fucoidi* (*Condriti*) *ed Elmintoidi*; talora con una zonula rossigno-violacescente verso la metà della serie: talora con una, più o meno potente, zona scistosa (marnoso-argilloso-arenacea, designata da taluni come *Flysch*) nella parte inferiore della serie; talora con una zona calcareo-nummulitifera alla base (il tipico *Nummulitico*).	**Eocene.**
Scisti policromi (la cosidetta *Scaglia*) con Calcari nummulitiferi verso l'alto. con denti di Pticodi verso il basso.	
Potente serie comprensiva di Argilloscisti (*Argille scagliose*, *Galestri* p. p.) grigio-brunastri, talora rossigni o policromi (specialmente verso l'alto), con *Calcari alberesi* (str. s.), *Pietraforte*, ecc.; serie racchiudente Cicadeoidee, Radiolariti di tipo mesozoico, Calpionelle, Inocerami, Ammoniti, Pticodi, Ittiosauri, ecc. ed inglobante Ofioliti o Pietre Verdi svariate (Serpentine, Oficalci, Peridotiti, Diabasi, Eufotidi, ecc.).	**Cretaceo.**
Calcari bianco-grigiastri ad Aptici	**Infracretaceo.**

Digitized by Google

Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati (e dei dinaftili, ecc.).

Considerazioni sul grande numero di antipodi ottici privi di atomi asimmetrici, che ne possono derivare.

Nota IV di LUIGI MASCARELLI
presentata dal Socio nazionale residente Felice Garelli.

La chimica del difenile e dei suoi derivati presenta ancora vari problemi insoluti. Tra questi particolarmente interessante è quello della interpretazione dei fenomeni di isomeria ottica che si osservano in alcuni suoi derivati.

Da qualche tempo (1) mi sto occupando di questo.

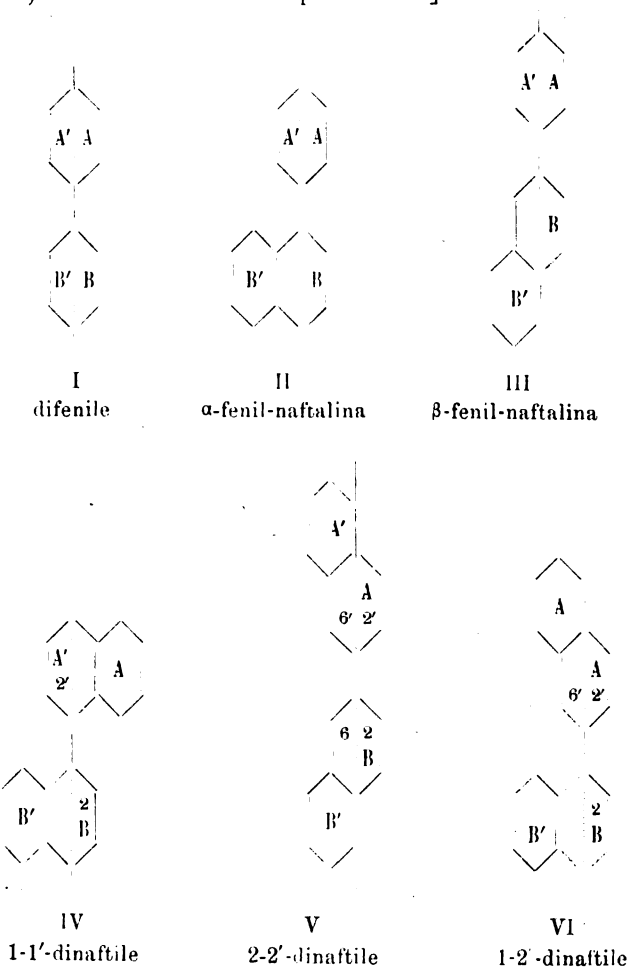
Dall'esame di tutti i derivati che dai vari ricercatori erano stati fino allora scissi in antipodi ottici e di quelli che non lo poterono essere, confronto da me fatto nella Nota I (2), sono giunto alla scelta della struttura da assegnarsi al difenile ed ai suoi derivati e, basandomi sulle numerose ricerche di autori inglesi e tedeschi, e confortando queste con esperienze mie, ho tratto le conclusioni essenziali sulle condizioni che si richieggono perchè la molecola dei vari derivati del difenile diventi strutturalmente asimmetrica. Nuove ricerche che confermano le conclusioni a cui ero arrivato precedentemente sono riportate nella Nota II (3). Nella nota III (4) ho esteso le considerazioni svolte a proposito del difenile anche ai fenomeni di stereoisomeria che possono essere presentati dai derivati delle mono-fenil-naftaline e dei dinaftili.

(1) " Giornale di Chim. Ind. ed Applicata „, Milano, 1926, 572.
(2) " R. Acc. Lincei „, *6* (6), II, 60 (1927).
(3) " Gazz. Chim. Ital. „, *58*. 627 (1928).
(4) " Gazz. Chim. Ital. „, *58*, 791 (1928).

Digitized by Google

Se col procedimento seguìto in questa terza Nota si volessero prendere in considerazione tutte le possibili sostituzioni, singole o multiple, che si possono effettuare in qualsiasi posizione delle molecole risultanti dalla unione, mediante legame semplice, di due nuclei, e se si volesse tosto riconoscere se la molecola che ne risulta è o no asimmetrica, il computo diverrebbe assai complesso.

In questa Nota ricorro quindi ad un artificio assai semplice per giungere rapidamente allo scopo. [È conveniente per ora fare astrazione dalle posizioni 8 8′, le quali possono in qualche caso (Nota III) esercitare influenza particolare].



I
difenile

II
α-fenil-naftalina

III
β-fenil-naftalina

IV
1-1′-dinaftile

V
2-2′-dinaftile

VI
1-2′-dinaftile

Digitized by Google

In ognuno dei prodotti corrispondenti agli schemi I ... VI i due nuclei di cui risulta composta la molecola sono uniti da un legame che può funzionare da asse di rotazione e siccome, per quanto ho dimostrato nelle Note precedenti, è condizione essenziale per l'asimmetria molecolare che i due nuclei non possano ruotare liberamente l'uno rispetto all'altro, ma che siano costretti ad una oscillazione quasi semicircolare, così si dovrà:

1) Osservare che siano presenti quei sostituenti necessari e sufficienti per produrre oscillazione semicircolare. (È sufficiente per questo che almeno tre delle quattro posizioni più vicine a quella in cui esiste il legame che stabilisce l'unione dei due nuclei — posizioni che possiamo denominare *orto* per rispetto a tale legame — siano occupate da sostituenti opportuni).

2) Prolungare (immaginando che i due nuclei costituenti la molecola giacciano nello stesso piano, p. es. quello del foglio) da ambe le parti la retta che segna il legame esistente fra i due nuclei della molecola ed osservare se le parti di destra (A, B) in cui rimane diviso ogni nucleo, sono o no l'immagine speculare delle rispettive parti di sinistra (A′, B′). La molecola è strutturalmente asimmetrica solo quando nessuna delle parti di destra è l'immagine speculare della corrispondente di sinistra.

Con questo artificio possiamo giudicare in ogni caso in cui trattisi di composti risultanti dalla unione per legame semplice di due nuclei qualisivogliano. Inoltre subito riesce chiaro che per tutti i derivati dei tre dinaftili si avrà asimmetria non appena in essi comparirà l'oscillazione semicircolare.

E perciò, nel caso dei tre dinaftili si avrà che:

1) Dei *derivati del* 1.1′-*dinaftile* saranno asimmetrici (oltre a quello che contiene un sostituente in una delle posizioni 2-2′) tutti gli innumerevoli altri polisostituiti, purchè in essi sia sempre impegnata almeno una delle posizioni 2-2′. Le sostituzioni in 4-4′ non possono avere influenza in questi fenomeni.

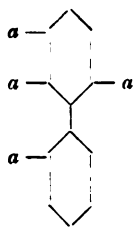
2) Dei *derivati del* 2.2′-*dinaftile* saranno asimmetrici tutti quelli polisostituiti che contengano almeno tre sostituenti distribuiti fra le posizioni 2.6.2′.6′.

3) Dei *derivati dell'*1.2′-*dinaftile* saranno asimmetrici tutti quelli polisostituiti che contengano almeno due sostituenti distri-

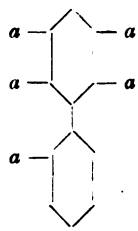
Digitized by Google

buiti fra le posizioni 2.2′.6′. La sostituzione in 4 non può avervi alcuna influenza.

La struttura dei tre dinaftili è infatti tale per cui, tosto che i due nuclei costitutivi della molecola sono costretti (per la presenza di opportuni sostituenti nelle volute posizioni) alla oscillazione semicircolare l'uno rispetto all'altro, lo scheletro fondamentale della molecola acquista configurazione asimmetrica, che nessun nuovo sostituente è più in grado di togliere. La struttura dello scheletro fondamentale della molecola del difenile invece è tale per cui, anche quando la molecola è diventata asimmetrica per opportune sostituzioni, può, in seguito ad ulteriori sostituzioni, tornare simmetrica: basti citare ad es. i tipi corrispondenti agli schemi VII e VIII.



VII
(asimmetrica)



VIII
(simmetrica)

Naturalmente i derivati della serie delle mono-fenil-naftaline mostreranno un comportamento intermedio tra quello del difenile e quello dei dinaftili, e ciò a causa della contemporanea presenza nella loro molecola di un nucleo benzenico e di uno naftalico.

Se cerchiamo di estendere tale semplice artificio ai più svariati composti risultanti dalla unione (per legame semplice) di due nuclei qualisivogliano (dipirrili, dipiridili, dichinolili, diantracili, ecc.) vediamo che è grandissimo il numero delle molecole capaci di fornire antipodi ottici pur senza contenere alcun atomo asimmetrico e che si presentano dei casi interessantissimi i quali meritano di essere posti in evidenza in una prossima Nota.

Digitized by Google

Nuovo procedimento per studiare le variazioni della resistenza all'urto su barrette intagliate dovute al fenomeno dell'invecchiamento.

Nota dell'Ing. RAFFAELLO ZOIA
presentata dal Socio nazionale non residente Camillo Guidi.

1. — Procedimenti generalmente usati.

È noto che la resilienza di un acciaio è, tra le varie proprietà che subiscono variazioni col tempo in seguito a deformazione permanente praticata a freddo (invecchiamento), una di quelle che ne risente in modo più appariscente gli effetti. Per deformare il metallo furono seguite diverse vie:

A) *Per compressione:* è il metodo ordinariamente usato (1).

È da osservare che anche procedendo con grande accuratezza (e prima avvertenza è naturalmente un'appropriata ricottura preliminare) permangono tra i singoli valori delle prove di una stessa serie sbalzi molto forti, talvolta anche maggiori dell'80 %; sbalzi inevitabili perchè dovuti allo " stato della zona in cui va a cadere l'intaglio della barretta di saggio „ più o meno " interessata vivamente dalla azione dello sforzo „ (2). Ad esempio, nelle esperienze del Bauer (1) gli scarti massimi dalla media furono nelle varie serie: 33 %, 13 %, 36 %, 23 %, 26 %, 24 %, 66 %, 30 %. È quindi necessario un gran numero di pro-

(1) Tra le numerose esperienze vanno ricordate le prime: *Bauer-Mat. Prüf.*, 1921, pag. 251.

(2) Sirovich, *Studio sulle chiodature delle lamiere*, 1925. — Fry, *Stahl und Eisen*, 1921, pag. 1093.

Digitized by Google

vette per ogni serie onde la media dei singoli valori della resilienza dia affidamento di sufficente approssimazione.

B) *Per tensione* (1):

Per piccole deformazioni vi è l'inconveniente che le superfici di scorrimento non sono uniformemente ripartite, come è noto, su tutta la lunghezza del saggio, ma cominciando dapprima ad apparire alle due estremità, si propagano poi successivamente a tutta la provetta. Se non si trascura questo fatto si possono tuttavia ottenere risultati soddisfacenti (2).

C) *Per flessione:*

Meno conveniente ancora è queste metodo, come è facile riconoscere sperimentalmente, per i notevoli scarti, ancora maggiori che col primo e col secondo.

D) *Per trafilatura* (3):

Procedimento molto pratico: con acciai dolcissimi si può facilmente giungere a ridurre la sezione fino ad oltre il 50 %, con opportuno numero di passate e senza alcuna ricottura. Le divergenze tra i singoli valori della resilienza sono sensibilmente inferiori a quelle che si verificano col metodo A).

Oltre al notevole inconveniente degli sbalzi tra i risultati di prove eseguite in identiche condizioni ve ne è un altro, pure comune a tutti questi sistemi: le prime misure di resilienza non si possono eseguire immediatamente dopo la deformazione, ma per la necessità di ricavare la provetta di saggio, decorre sempre parecchio tempo tra la deformazione e la prima prova. Col metodo seguito dal Bauer tale inconveniente era alquanto ridotto: egli agiva infatti per compressione su barrette pressochè delle dimensioni finali e con una rigonfiatura centrale;

---

(1) Zoia, *Rendiconto XI riunione Associazione Italiana per gli Studi sui materiali da costruzione*, 1926, pag. 28.

(2) Lav. cit., pag. 31.

(3) Cfr. Zoia, Comunicazioni 1ª e 2ª alla XII riunione Assoc. It. Studi mat. costr., settembre 1928.

Digitized by Google

era così ridotta di molto la lavorazione dopo la deformazione. Col metodo della trafilatura un espediente molto semplice è quello di trafilare una barra quadra con ultima passata 10 × 10 (per le barrette Mesnager): dopo la trafilatura non rimane che segare le barrette ed intagliarle, operazioni che possono essere fatte in brevissimo tempo.

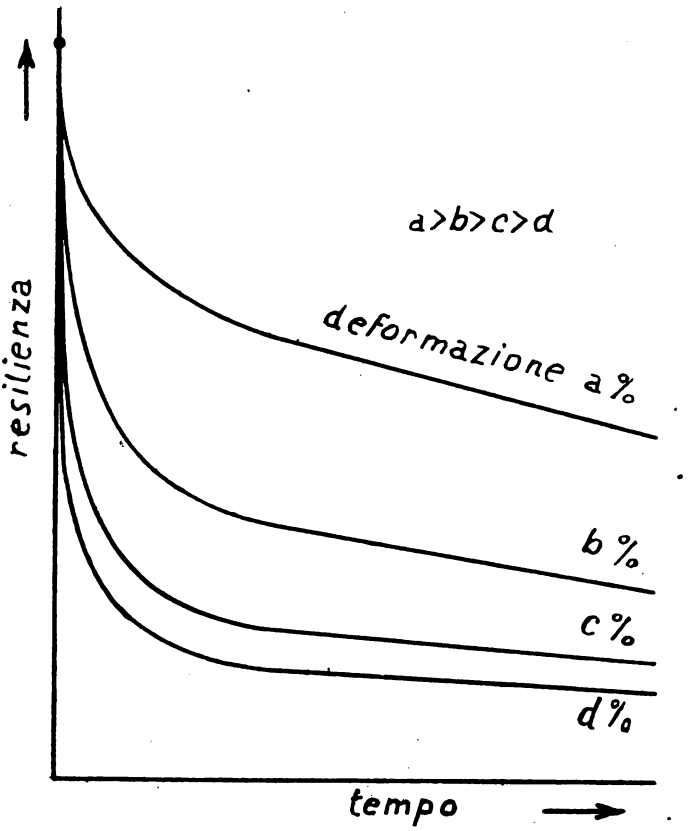


Fig. 1.

Volendo studiare sistematicamente il fenomeno dell'invecchiamento, in ogni caso sono da prendersi in considerazione le due variabili *tempo* e *deformazione percentuale*. I risultati possono essere riassunti nei due diagrammi resilienza-tempo (con curve di eguale deformazione percentuale) (Fig. 1), e resilienza-defor-

Digitized by Google

mazione percentuale (con curve di eguale periodo d'invecchiamento) (Fig. 2).

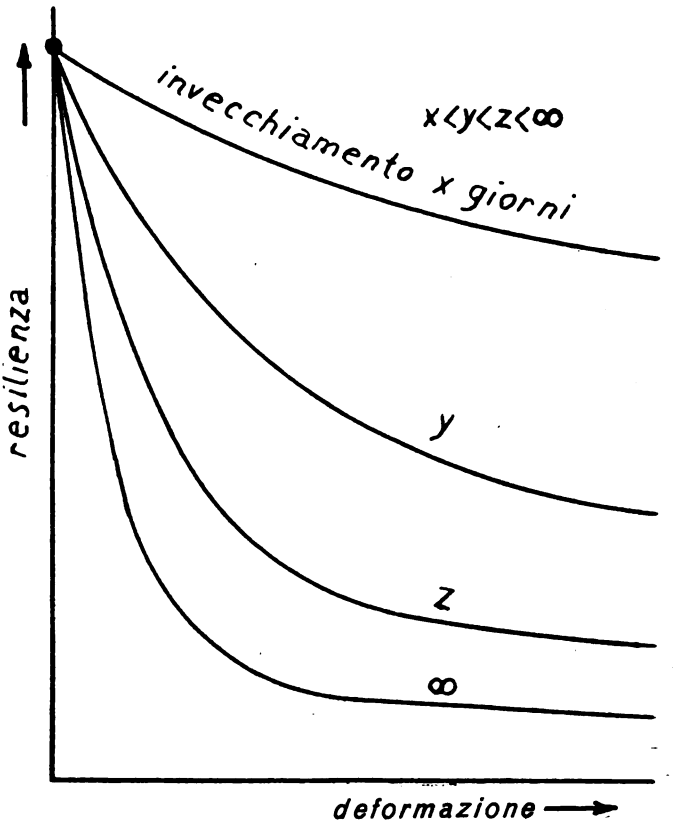


Fig. 2.

II. — Nuovo procedimento.

La deformazione è prodotta sulle barrette già ultimate mediante un colpo di moderata e nota energia applicato collo stesso maglio che serve per le prove all'urto (1). Le barrette vengono

(1) Facendo diminuire l'altezza di caduta del maglio o del pendolo a valori da determinarsi in precedenza, si diminuisce l'energia disponibile al numero di kgm. desiderati.

Digitized by Google

poi spezzate dopo diversi intervalli di tempo con un secondo colpo di intensità regolamentare ed *è misurato il lavoro assorbito nella rottura di esse* (1).

VANTAGGI: 1) La prima misura (2° colpo) può essere eseguita alla distanza di 10″ dalla deformazione (1° colpo). Dato l'andamento delle curve che scendono con grande rapidità in principio (v. Fig. 1), ciò costituisce un vantaggio rispetto agli altri metodi coi quali, come si è visto, è impossibile avere un primo valore della resistenza all'urto immediatamente dopo la deformazione.

2) Per la localizzazione della deformazione nella zona di rottura e la perfetta uniformità di tale deformazione in tutte le barrette, i singoli valori della resistenza all'urto sono molto più concordanti tra loro: nel caso dell'acciaio *B* (v. unita tabella) risultarono, ad esempio, scarti massimi nelle diverse serie del 7,1 %; 7,8 %; 8,7 %; 13,9 %; 6,5 %; 5,7 %; 2,7 %; con una media del 7,5 % contro uno scarto massimo medio del 31 % nelle esperienze citate del Bauer.

3) Essendo la deformazione, a differenza degli altri metodi, prodotta per urto, essa è direttamente confrontabile, perchè della stessa natura, colla sollecitazione dinamica colla quale si spezza la barretta (v. nelle Figg. 3 e 4 la linea inclinata a 45°).

Lo studio sistematico del fenomeno dell'invecchiamento dipende sempre dalle due variabili *tempo* e *deformazione,* misurando peraltro quest'ultima col numero di chilogrammetri del 1° colpo (dai quali appunto essa dipende). I risultati vengono chiaramente riassunti nel diagramma lavoro di rottura-deformazione, portando come ordinate la somma dei lavori assorbiti nel 1° e 2° colpo: si ottiene una prima linea fissa (retta uscente

(1) È quasi inutile osservare che non è più il caso di parlare di resilienza (grandezza, come è noto, non propriamente definita e che ha un valore comparativo solo nel caso in cui le prove vengano eseguite in condizioni scrupolosamente identiche), poichè in questa particolare prova all'urto sono modificate le condizioni normali e precisamente la barretta è già alquanto piegata per effetto del primo colpo.

Digitized by Google

dall'origine ed inclinata di 45°), ed una seconda linea che varia di posizione col tempo d'invecchiamento e che riferita alla prima dà il lavoro assorbito nel 2° colpo, mentre se è riferita all'asse delle ascisse dà l'energia totale richiesta per rompere la barretta nei due colpi. Si ottengono delle curve interessanti, aventi la

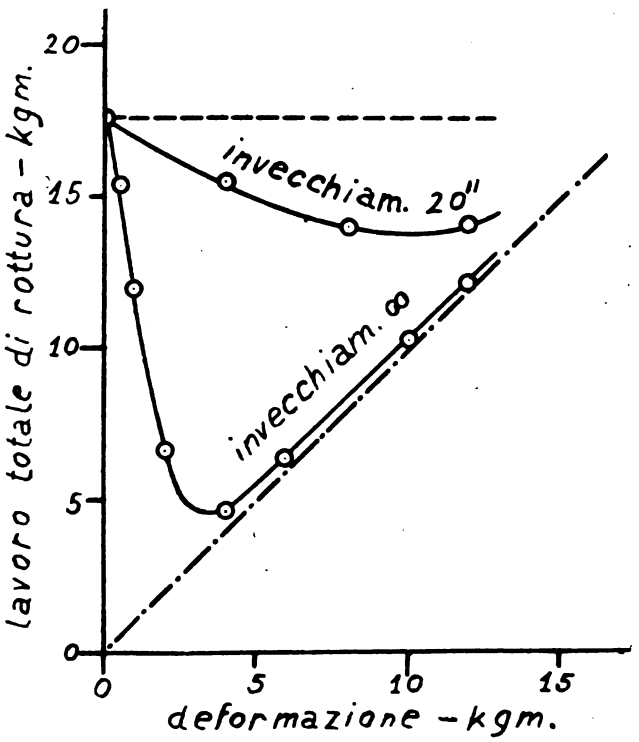


Fig. 3.

particolarità di scendere fino ad un minimo per poi risalire, e tale andamento è tanto più accentuato quanto più il materiale è invecchiato (1). Nelle Figg. 3 e 4 riferisco come esempio i diagrammi per *due acciai il cui comportamento all'invecchiamento*

(1) Nelle Figg. 3 e 4 sono tracciate le curve corrispondenti a 20" e ad un tempo lunghissimo d'invecchiamento, che si può, come è noto, realizzare con rinvenimento di qualche ora a 200°-300°.

Digitized by Google

appare sostanzialmente differente, riservandomi di comunicare tra breve i risultati di esperienze in corso su una serie completa

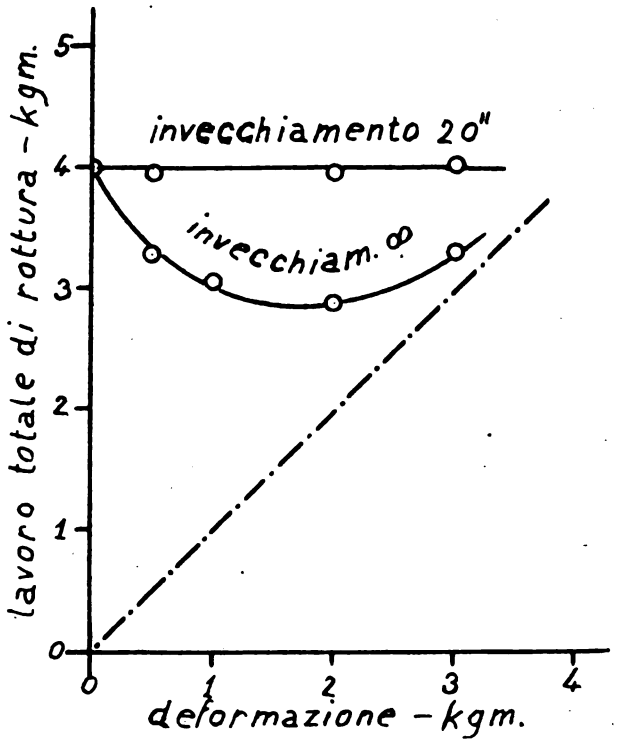


Fig. 4.

di acciai onde tener conto anche della composizione chimica che ha un'influenza notevole, come è noto, sul fenomeno.

(Vedi *Tabella* a pagina seguente).

Digitized by Google

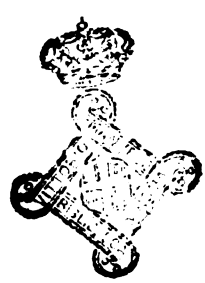
LAVORO TOTALE DI ROTTURA (kgm.) — Acciaio *B*

(Barretta Mesnager — Pendolo Charpy).

Tempo di invecchiamento	Energia assorbita nel 1° colpo: kgm.				
	0	0,5	1	2	3
20 secondi	3 978	4 070	— —	3 655	3 888
	3 876	3 675	— —	3 990	4 033
	4 050	4 171	— —	3 990	3 816
	3 978	4 171	— —	3 990	4 414
	3 978	3 773	— —	4 162	4 258
	— —	3 871	— —	3 990	3 959
Medie	3 972	3 955	— —	3 968	4 061
Rinvenimento di 4 ore a 260°-270°	— —	2 839	3 249	3 057	3 410
	— —	3 578	3 249	2 816	3 284
	— —	3 390	3 075	2 816	3 410
	— —	3 109	3 075	2 959	3 284
	— —	3 578	2 862	2 816	3 244
	— —	3 295	2 862	2 888	3 284
Medie	— —	3 298	3 062	2 892	3 319

Laboratorio Sperimentale della R. Scuola d'Ingegneria di Torino.

L'Accademico Segretario
Emilio Repossi.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg e 96 tav.

Opere scelte di Amedeo Avogadro (per cura di **I. Guareschi**).

Torino, Unione tipografico-editrice torinese, 1911, 1 vol. in-4° (4 csn., CXL-492 pp., 1 ritr.).

Miscellanea di studi danteschi. ***Dante e il Piemonte.***

Torino, Fratelli Bocca editori, 1922, in-8° (VIII-648 pp.).

Digitized by Google

SOMMARIO

Presidenti della Reale Accademia delle Scienze di Torino dalla sua fondazione . . . . . *Pag.* v

Elenco degli Accademici Nazionali residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 31 dicembre 1928 . . . „ vii

Mutazioni avvenute nel Corpo accademico dal 1° gennaio al 31 dicembre 1928 . . . . . „ xxiii

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 18 Novembre 1928 . *Pag.* 1

Somigliana (Carlo). — Sulla misura della Terra e la gravimetria „ 4

Sacco (Federico). — Nuovi dati di fatto riguardo l'età degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino . . . . . „ 11

Mascarelli (Luigi). — Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati (e dei dinaftili, ecc.). Considerazioni sul grande numero di antipodi ottici privi di atomi asimmetrici, che ne possono derivare . . . . . „ 31

Zoia (Raffaello). — Nuovo procedimento per studiare le variazioni della resistenza all'urto su barrette intagliate dovute al fenomeno dell'invecchiamento . . . . . „ 35

Cap. Vincenzo Bona - Torino

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

BIBLIOTECA NAZIONALE VE-ROMA
16 NOV 1929
TRIESTE

VOL. LXIV, DISP. 2ª, 3ª, 4ª, 5ª E 6ª, 1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

DISTRIBUZIONE DELLE ADUNANZE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

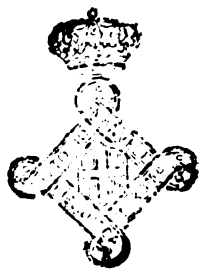
nell'anno 1928-929

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1928 - 18 novembre	1928 - 25 novembre
» - 2 dicembre	» - 9 dicembre
» - 16 »	» - 23 »
» - 30 »	1929 - 6 gennaio
1929 - 13 gennaio	» - 20 »
» - 27 »	» - 3 febbraio
» - 10 febbraio	» - 17 »
» - 24 »	» - 3 marzo
» - 10 marzo	» - 17 »
» - 24 »	» - 7 aprile
» - 14 aprile	» - 28 »
» - 5 maggio	» - 12 maggio
» - 19 »	» - 26 »
» - 9 giugno	» - 16 giugno
» - 23 »	» - 30 »

Digitized by Google

CLASSI UNITE



Adunanza del 25 Novembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono intervenuti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: D'Ovidio, Peano, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Pochettino e il Segretario Repossi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: De Sanctis, Ruffini, Stampini, Brondi, Einaudi, Patetta, Vidari, Faggi, Luzio, Jannaccone e Solari.

Scusano l'assenza i Soci Guidi e Mattirolo.

Il Presidente apre l'adunanza commemorando brevemente il Socio Prof. Giuseppe Prato, morto il 18 agosto, ed il Professore Piero Giacosa, proposto a Socio della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali e morto il 17 ottobre.

Il Presidente comunica quindi una lettera di ringraziamento di S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione, giunta in risposta ad un telegramma di omaggio inviatogli in nome dell'Accademia in occasione dell'apertura del nuovo anno. Egli propone in seguito all'Accademia che, per la fausta notizia della scoperta fatta in questi giorni da S. A. R. il Duca degli Abruzzi delle sorgenti dell'Uebi Scebeli, sia votato il seguente Ordine del giorno:

" La R. Accademia delle Scienze, che altamente si onora di avere fra i suoi Soci residenti S. A. R. Luigi di Savoia, Duca degli Abruzzi, apprende col più vivo compiacimento che il va-

Digitized by Google

loroso ed illustre esploratore ha condotto rapidamente e felicemente a termine la studiata esplorazione alla ricerca ed alla scoperta delle sorgenti dell'Uebi Scebeli.

" Alla nobile gara di ardite iniziative e di geniali imprese, le quali danno impronta nuova e caratteristica al fervore di vita operosa che ora anima il nostro Paese, il Principe è partecipe e, ancora una volta, vittorioso.

" La R. Accademia plaude al successo della spedizione, che svela un altro dei segreti dell'Africa ancora misteriosa, reca nuovo onore al Nome ed alla Casa di S. A. R., e rende sempre più grande e brillante il contributo, che l'Italia, per merito e coi sacrifizi della gloriosa schiera dei suoi esploratori, ha portato agli studi africani „.

L'Accademia vota per acclamazione e con vivo plauso l'Ordine del giorno propostole.

Il Socio Peano comunica all'Accademia ch'è giunta in omaggio l'opera: *Calcolo numerico* (ed. Zanichelli, a. 1928), di Ugo Cassina, e la presenta con le seguenti parole:

" Questo libro espone la storia dei sistemi di numerazione dai popoli antichi ad oggi e le varie regole per le operazioni aritmetiche, fra cui la moltiplicazione fulminea degli indiani, che permette di scrivere il prodotto di due numeri di più cifre, senza passare per i prodotti parziali.

" Degno di nota speciale è il capitolo sulle " Approssimazioni numeriche „, esposte in modo rigoroso e semplice: poichè rigore è semplicità sono sempre congiunti. E cita alcuni risultati falsi cui si pervenne con teorie inesatte delle approssimazioni.

" Il libro contiene pure i calcoli sul calendario, i prodotti decimali e le loro applicazioni; vari calcoli di numeri trascendenti e di radici di equazioni. Le indicazioni storiche ampie ed esatte rendono lo studio vivo ed attraente.

" Questo volume è di massimo interesse per la matematica pura e per le applicazioni; contiene molte ricerche poco note, o del tutto nuove; ed è da augurarsi la sua diffusione per il progresso della scienza matematica „.

Si procede pure alla votazione per l'assegnazione del premio

Digitized by Google

Gautieri, che non potè esser fatta nell'adunanza precedente per mancanza del numero legale. La votazione, secondo lo Statuto del Premio, è fatta per schede segrete. I votanti sono in numero di 21 e lo scrutinio dà 19 voti favorevoli sul nome di Ettore Cozzani, proposto nella Relazione della Commissione stesa dal Socio on. Cian, contro due schede bianche.

Il Presidente invita quindi l'Accademia a procedere alla votazione per la nomina del Tesoriere, che, scaduto il triennio, può essere riconfermato. La votazione, rimandata, come la precedente, dall'adunanza dello scorso luglio all'attuale, per la mancanza in quella del numero legale, dà i seguenti risultati: Votanti 21: al Socio Prof. Modesto Panetti voti 20; schede bianche 1. Risulta quindi riconfermato alla carica di Tesoriere pel triennio 1° luglio 1928 - 30 giugno 1931 il Socio Prof. Modesto Panetti, il quale ringrazia l'assemblea.

Gli Accademici Segretari:
Emilio Repossi
Adolfo Faggi

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 2 Dicembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Panetti, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli e il Segretario Repossi.

Scusa l'assenza il Socio Guidi.

Il verbale è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio Sacco presenta in omaggio all'Accademia una sua Nota su *I Solchi di Montjovet* e ne espone brevemente il soggetto.

In seguito il Socio Peano presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota della Dott.ssa Cesarina Boccalatte dal titolo: *La Geometria basata sulle idee di punto e angolo retto.*

Digitized by Google

LETTURE

La Geometria basata sulle idee di punto e angolo retto.

Nota della Dott.ssa CESARINA BOCCALATTE
presentata dal Socio nazionale residente Giuseppe Peano.

Euclide nel primo libro degli *Elementi* (Versione Vacca, 1916) comincia così:

1. " Punto è ciò che non ha parti „.
2. " Linea una lunghezza senza larghezza „

Queste proposizioni esprimono il punto e la linea mediante le parole *parte*, *lunghezza*, *larghezza*, e questi termini non sono definiti precedentemente.

La proposizione:

3. " Estremi di una linea sono punti „, non è un'eguaglianza logica; non è la definizione di estremi, poichè dal sapere che gli estremi sono punti, non risulta che cosa siano gli estremi. Quindi queste proposizioni non sono vere definizioni, come da parecchi sono intese. Come osserva il Vacca nella sua Edizione, la parola *ὅρος*, che si trova nel testo greco, significa *termine*, e non già *definizione*, che in greco è *ὁρισμός*.

Quindi quelle prime pagine sono una raccolta di termini, come un dizionario, e le proposizioni relative non sono definizioni, nè postulati; sono schiarimenti.

Le definizioni di Euclide si riproducono in tutti i libri scolastici dei secoli successivi. Cominciamo a vedere qualche differenza in Nicolò Tartalea, " *Euclide Megarense* „ (Venezia, 1565).

Definizione 1. " Il ponto è quello che non ha parti „,

Definizione 2. " La linea è una lunghezza senza larghezza, li termini della quale sono ponti „.

Questa comprende le definizioni 2 e 3 di Euclide.

Digitized by Google

DEFINIZIONE 3. " La linea è la brevissima estensione da un ponto ad un altro „.

Quest'ultima definizione si può anche leggere:

" La retta è il più corto cammino fra due punti „ e sotto questa forma la ritroveremo ancora in Legendre, *Éléments de Géométrie*, 1794. Essa esprime l'idea di retta mediante quella di lunghezza di una linea curva, concetto questo non definito e non semplice.

La proposizione " la retta è minore d'ogni linea contermine „, è un postulato in Archimede, il quale se ne serve, per determinare la lunghezza della circonferenza.

La distinzione delle idee che compaiono in un trattato di geometria, in idee primitive e in idee derivate, delle quali si dà una definizione logica, ha luogo solo ai nostri tempi.

Numerosi sono i lavori dei geometri contemporanei sui principî di Geometria. " Mais les plus complets et les plus approfondis sont ceux qui ont été exécutés au moyen de la Logistique, parce que cet instrument d'abstraction et de précision permet de dévoiler les pétitions de principe, d'éviter les paralogismes et les appels à l'intuition, et de déjouer les associations d'idées et les habitudes de pensée inséparables du langage usuel „. COUTURAT, *Les principes de Mathématiques*, Paris, 1905, pag. 181.

M. PASCH, in *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Leipzig, 1882), costrusse tutta la Geometria di posizione colle sole idee non definite: *punto, segmento rettilineo, regione piana limitata.*

Partendo da questi concetti primitivi definisce la retta indefinita, ed il piano. Per svolgere poi la geometria elementare assume un'altra idea non definita: *il moto*, come concetto di congruenza tra figure qualisiansi composte di un numero finito di punti.

G. PEANO. *I principî di Geometria logicamente esposti* (Torino, 1889).

In questo libro l'A. partendo da due idee primitive, *punto* e *segmento*, definisce la retta, il piano, il triangolo, l'angolo, le parallele; e premesso un sistema di postulati, ne dimostra le

Digitized by Google

loro proprietà, costruendo così tutta la geometria di posizione. Accenna poi che per costrurre tutta la Geometria elementare, occorre ancora qualche altra idea primitiva, per es. quella di *moto*. Per fare questa analisi, l'autore si serve delle notazioni della Logica Matematica.

Egli riprende questo studio in modo più diffuso nell'articolo: *Sui fondamenti della Geometria*, " Riv. di Matematica „, a. 1894.

M. PIERI, rapito alla scienza in giovane età nel 1913, studiò questa questione in una serie di pubblicazioni fatte coi simboli della Logica-Matematica, " la cui utilità a ragione non può negarsi segnatamente in quest'ordine di studi „.

Le prime si riferiscono alla sola *Geometria di Posizione*, in " Atti R. Accademia di Torino „, 1895, 1896 e 1897; " Rivista di Matematica „, a. 1896; e specialmente in " Memorie Accad. delle Scienze di Torino „, a. 1897-98.

PIERI, *Della Geometria elementare come sistema ipoteticǫ deduttivo* (" Memorie R. Accademia di Torino „, a. 1899).

Qui l'A. svolge tutta la geometria elementare con due soli concetti primitivi: il *punto*, ed il *moto*; il moto inteso come rappresentazione di punti in punti.

DEFINIZIONE. Se a, b, c sono punti, con " a, b, c sono collineari „ si esprime il giudizio: " esiste un movimento (proprio) che rappresenta in sè stesso ciascuno degli a, b, c „.

Segue la definizione di retta a, b: l'insieme dei punti collineari con a, b; ossia l'insieme dei punti che restano fissi in un movimento che lascia fissi a e b, e questa è la definizione di Leibniz.

Definisce il piano; la sfera; la simmetria; la perpendicolarità di due rette; la perpendicolarità tra una retta ed un piano; il segmento, ecc.

E da un sistema di 20 postulati deduce tutte le proprietà di questi enti definiti.

Più tardi il PIERI, *Sur la géométrie envisagée comme système purement logique* (Congrès Intern. de philosophie, Paris, 1900), giunge al risultato che si possa costruire tutta la Geometria elementare colle sole due idee primitive: *punto* e *distanza* tra due punti.

Digitized by Google

E questa seconda idea primitiva non la assume come una relazione fra quattro punti a, b, c, d, sotto la forma: la distanza di a e b è eguale alla distanza da c a d, ma assume soltanto *come primitiva la relazione fra tre punti* a, b, c: " i punti b e c sono equidistanti da a ".

E sviluppa ampiamente questa teoria nelle " Memorie Accademia dei XL ", Roma, 1908.

G. PEANO, *La Geometria basata sulle idee di punto e distanza* (R. Accademia di Torino, a. 1902).

L'A. parte dal lavoro del Pieri, cioè assume le idee di punto e della relazione fra 3 punti: distanza (a, c) = distanza (b, c).

Questa relazione si può risolvere rispetto a, e si leggerà: " il punto a sta sulla sfera di centro c e passante per b ". Ovvero risolta rispetto c: " il punto c sta nel piano normale ad a b nel suo punto medio ". Si può definire la retta per i due punti differenti a e b: " Dire che c è un punto della retta a, b, significa dire che ogni punto, che disti da a e da b quanto c, deve coincidere con c "; ovvero " quando le sfere di centri a e b e passanti per c hanno questo solo punto comune ". Analogamente: " piano (a, b, c) è l'insieme di tutti i punti x tali che ogni punto, che disti da a, b, c quanto x, deve coincidere con x ".

Queste definizioni si debbono a Leibniz (" Math. Schriften ", t. 5, pag. 141 e seguenti): egli se ne vanta e dice " haec definitio mihi est ".

Peano considera poi il punto medio fra due punti a e b, che indica, come nel calcolo geometrico di Möbius, ecc., con $(a + b)/2$; di qui deduce l'eguaglianza dei vettori, le coordinate, ecc.

Sullo stesso soggetto si possono ancora vedere:

O. VEBLEN, *A System of Axiom for Geometry* (" Transactions of the Amer. Mathem. Society ", t. V, luglio 1904, pp. 343-384).

F. SCHUR, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig, 1909).

ENRIQUES e AMALDI, in " Questioni riguardanti le Matematiche elementari ".

Digitized by Google

***

Dietro suggerimento del Prof. PEANO, qui spiego come si possano definire tutte le idee geometriche, mediante due idee che assumo come primitive:

punto e *angolo retto.*

Le indicherò con i simboli:

p si legge " punto „.

In quanto segue, a, b, c .... indicano punti.

" $a\,b\,c$ Retto „, si legge " l'angolo $a\,b\,c$ è retto „.

In pratica si riconosce che questa relazione è soddisfatta mediante una squadra; essa sarà l'unico strumento necessario in questa teoria.

Comincio ad enunciare una proprietà:

PROP. 1.

$$a\,b\,c \text{ Retto} \;.\supset.\; c\,b\,a \text{ Retto}.$$

" Se l'angolo $a\,b\,c$ è retto, anche $c\,b\,a$ è retto „.

Questa prima proprietà si dovrà considerare come primitiva, cioè non si deduce da alcuna precedente, che non esiste.

Alla relazione " $a\,b\,c$ Retto „ dò il preciso significato espresso nella teoria dei vettori da

$$(a - b) \times (b - c) = 0.$$

Quindi si può enunciare una seconda proprietà:

PROP. 2.

$$a\,a\,c \text{ Retto}.$$

" Se il punto b coincide con a, l'angolo $a\,b\,c$ è retto „.

La relazione " $a\,b\,c$ Retto „ si può risolvere rispetto ad uno qualunque dei punti che contiene.

Risolta rispetto a, ne risulta come luogo dei punti a, il piano perpendicolare in b alla retta $b\,c$, supposto b e c distinti.

Poniamo pertanto:

Digitized by Google

DEFINIZIONE 1.

$$b \sim = c \,.\, \supset : a \,\varepsilon \text{ Piano } b\,c \,.\, = \,.\, a\,b\,c \text{ Retto.}$$

" Se b è differente da c, allora dire che a sta nel piano $b\,c$, significa che l'angolo $a\,b\,c$ è retto „.

Si deduce dalle nostre convenzioni, in virtù di P. 2:

COROLLARIO 1.

$$b \sim = c \,.\, \supset \,.\, b \,\varepsilon \text{ Piano } b\,c.$$

" Il punto b appartiene al piano $b\,c$ „.

Risolvo ora la relazione " $a\,b\,c$ Retto „ rispetto b, e ne risulta come luogo dei punti b, la Sfera passante per b e di diametro $a\,c$; veniamo così a definire la " Sfera $a\,c$ „, ossia " Sfera di diametro $a\,c$ „.

DEFINIZIONE 2.

$$b \,\varepsilon \text{ Sfera } a\,c \,.\, = \,.\, a\,b\,c \text{ Retto.}$$

Si deduce:

COROLLARIO 2.

$$a, b \,\varepsilon \text{ Sfera } a\,b,$$

" a e b sono punti della sfera $a\,b$ „, conseguenza della P. 2.

COROLLARIO 3.

$$\text{Sfera } a\,b = \text{Sfera } b\,a.$$

Segue dalla proprietà commutativa espressa dalla P. 1.

Vediamo ora come possiamo definire la *linea retta*.

DEFINIZIONE 3.

$$a \sim = b \,.\, \supset \,.\, c \,\varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.\, = ;$$

$$x \,\varepsilon\, \bar{\text{p}} \,.\, x\,a\,b \text{ Retto} \,.\, \supset_x \,.\, x\,a\,c \text{ Retto.}$$

" Se a è diverso da b, allora dire che c sta sulla linea retta individuata dai punti a e b, significa che comunque si prenda il punto x, in modo che l'angolo $x\,a\,b$ sia retto, ne risulta che anche l'angolo $x\,a\,c$ è retto „.

Possiamo mettere la Def. 3 anche sotto la forma:

Digitized by Google

DEFINIZIONE 3'.

$$c \varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.\, =\,.$$

$$c = a \,.\, \cup \,.\, \text{Piano } a\,b = \text{Piano } a\,c.$$

" Dire che c sta sulla linea retta $a\,b$ significa che o c coincide con a, ovvero il piano $a\,b$ coincide col piano $a\,c$ „.

Si può dare alla Def. 3 ancora un'altra forma:

DEFINIZIONE 3''.

$$c \varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.\, =:$$

$$x \varepsilon \text{ p.} \, x \varepsilon \text{ Sfera } a\,c \,.\, x \varepsilon \text{ Sfera } c\,b \,.\, \supset_x \,.\, x = c.$$

" Il punto c sta sulla retta $a\,b$ quando comunque si prenda il punto x, che stia sulle sfere di diametro $a\,c$ e $c\,b$, esso coincide con c „, cioè quelle due sfere hanno il solo punto comune c.

E ancora sostituendo a " Sfera „ la sua definizione 2, si ha l'altra forma:

DEFINIZIONE 3'''.

$$c \varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.\, =:$$

$$x \varepsilon \text{ p} \,.\, a\,x\,c \text{ Retto} \,.\, b\,x\,c \text{ Retto} \,.\, \supset_x \,.\, x = c.$$

" Il punto c sta sulla retta $a\,b$, quando comunque si prenda il punto x, tale che l'angolo $a\,x\,c$ sia retto, e pure l'angolo $b\,x\,c$ sia retto, il punto x deve coincidere con c „.

Ora che abbiamo definito la linea retta, possiamo passare a definire la collinearità.

DEFINIZIONE 4.

$$(a\,b\,c) \text{ Collin} \,.\, =:$$

$$a = b \,.\, \cup \,.\, a \sim b \,.\, c \varepsilon \text{ Linea retta } a\,b.$$

" Diremo che i punti a, b, c sono collineari, se a coincide con b, ovvero, se essendo a diverso da b, c sta sulla retta $a\,b$ „.

Definiamo ora il rettangolo:

DEFINIZIONE 5.

$$a, b, c, d \varepsilon \text{ p} \,.\, \supset \,.\, (a\,b\,c\,d) \text{ Rettangolo} \,.\, =\,.$$

$$a\,b\,c \text{ Retto} \,.\, b\,c\,d \text{ Retto} \,.\, c\,d\,a \text{ Retto} \,.\, d\,a\,b \text{ Retto}.$$

Digitized by Google

" La figura $a\,b\,c\,d$ è un rettangolo se i quattro angoli sono retti ". Risulta dalla Prop. 2, che $(a\,a\,c\,c)$ Rettangolo.

Si può anche dare la definizione seguente:

DEFINIZIONE 5'.

$$(a\,b\,c\,d) \text{ Rettangolo} . = . \text{Sfera } a\,c = \text{Sfera } b\,d.$$

" La figura $a\,b\,c\,d$ è un rettangolo quando la sfera di diametro $a\,c$ è eguale alla sfera di diametro $b\,d$ ".

Sappiamo dalla Geometria elementare, che nel rettangolo le diagonali si tagliano per metà.

Assumeremo questa proprietà quale definizione di punto medio di due punti a e b. E l'indicheremo, come nella teoria dei vettori, con

$$(a + b) / 2$$

(secondo Möbius, Grassmann ed altri).

DEFINIZIONE 6.

$$c = (a + b) / 2 . = :$$

$$x, y \,\varepsilon\, \text{p} . (a\,x\,b\,y) \text{ Rettangolo} . \supset_{x,y} (x\,y\,c) \text{ Collin.}$$

" Essendo a, b, c dei punti, allora diremo che c è il punto medio fra a e b, quando comunque si prendano i punti x, y, in modo che $a\,x\,b\,y$ sia un rettangolo, c è collineare con x ed y ".

Facendo coincidere x e y con a e b, si deduce $(a\,b\,c)$ Collin.

Definito il punto medio di due punti, possiamo definire l'eguaglianza di due vettori $a - b$, e $c - d$.

DEFINIZIONE 7.

$$a - b = c - d . = . (a + d) / 2 = (b + c) / 2$$

simile ad una identità algebrica.

In modo analogo:

$$0 = a - a$$

è la definizione del vettore nullo.

$$a + (b - a) = b$$

è la definizione della somma d'un punto con un vettore.

$$(a - b) + (b - c) = a - c,$$

è la definizione della somma dei due vettori.

Digitized by Google

Ripetendo le note definizioni aritmetiche si ha il prodotto $m\,u$ d'un numero naturale m per un vettore u, ed il quoziente u/m del vettore u per il numero naturale m. E quindi il prodotto d'un vettore per un numero razionale qualsiasi.

Se u e v sono vettori, porremo:

$$\mathrm{mod}\,u = \mathrm{mod}\,v \,.=.\, a\,\varepsilon\,\mathrm{p}\,.\,\supset_a .\,(a,\, a+(u+v)/2,\, a+u)\ \text{Retto}.$$

" I due vettori u e v hanno la stessa lunghezza o modulo, quando preso ad arbitrio un punto a, l'angolo di cui due vertici sono a e $a+u$, e il vertice intermedio è $a+(u+v)/2$, è retto „, cioè il triangolo $a,\ a+u,\ a+v$ è isoscele, vale a dire, l'altezza cade nel punto medio del lato.

Due vettori u e v sono ortogonali, e scriveremo come nel calcolo geometrico, $u \times v = 0$, se preso un punto a, l'angolo $(a+u,\ a,\ a+v)$ è retto.

Allora dalla proprietà che l'ipotenusa del triangolo rettangolo è maggiore d'un cateto, deduco la definizione di maggioranza fra distanze o moduli:

$$u \times v = 0 \,.\supset.\, \mathrm{mod}\,(u+v) \geqq \mathrm{mod}\,u\,.$$

Si ha la maggioranza, escludendo l'eguaglianza, cioè supponendo $v \sim = 0$.

Definita la maggioranza fra moduli o distanze, si può definire il limite d'un vettore variabile; quindi il prodotto d'un vettore per un numero irrazionale, le coordinate dei vettori e dei punti, e tutti gli enti della geometria analitica.

In conclusione risulta che tutta la geometria si può fondare sull'idea primitiva di punto e da un'altra idea che si può assumere o sotto la forma di equidistanza, con Pieri, o di angolo retto, come qui.

In ambo le teorie però, la definizione di retta si presenta alquanto artificiosa. Quindi in geometria elementare conviene aggiungere qualche altra idea, per es. quella di segmento di retta, senza definizione.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Dicembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. GUIDO GRASSI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Somigliana, Panetti, Ponzio, Majorana, Pochettino e il Segretario Repossi.

Scusano la loro assenza il Presidente Parona ed il Socio Sacco.

Il verbale della seduta antecedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica una lettera del Socio Herlitzka, che accetta l'incarico affidatogli di commemorare il Prof. Giacosa e ringrazia l'Accademia.

In seguito il Socio Majorana prende la parola per presentare in omaggio all'Accademia i due volumi degli *Atti* del Congresso Internazionale dei Fisici tenutosi lo scorso anno a Como, Pavia e Roma in occasione del primo centenario della morte di Alessandro Volta. Il Congresso, al quale parteciparono numerosi fisici d'ogni parte del mondo, e, fra questi, dodici insigniti del premio Nobel, riuscì particolarmente solenne, ed i risultati da esso conseguiti furono così importanti da indurre alcuni fra i più

Digitized by Google

illustri partecipanti a formular la proposta, unanimemente accolta, che il Consiglio di presidenza del Congresso, invece di sciogliersi, rimanesse stabilmente in carica per organizzare future regolari riunioni internazionali di fisici.

Il Socio MAJORANA, a chiarimento di un'osservazione fatta dal Socio SOMIGLIANA sulla priorità del VOLTA nella scoperta della legge che va sotto il nome di " legge di Gay-Lussac „ comunica che il Congresso, udita una comunicazione del Professore AMERIO documentante che il VOLTA riconobbe per primo la costanza del coefficiente di dilatazione dell'aria, fece unanime voto perchè d'ora innanzi nell'espressione della legge di dilatazione dei gas si unisse al nome di GAY-LUSSAC quello del grande fisico comasco.

Il Socio SOMIGLIANA comunica che, secondo gli studi della Commissione Reale per l'Edizione Nazionale delle opere di Alessandro VOLTA, non solo per la legge di Gay-Lussac, ma anche per la legge di Dalton si deve giungere ad un analogo risultato.

In seguito il Socio PANETTI presenta in omaggio all'Accademia il proprio discorso pronunziato per l'inaugurazione del Congresso annuale dell'Associazione Italiana di Aerotecnica dal titolo: *Il contributo della tecnica all'Aeronautica.* Lo stesso opuscolo contiene il discorso di chiusura del Congresso.

Il Presidente presenta all'Accademia i due volumi dell'opera di R. WILLSTÄTTER: *Untersuchungen ueber Enzyme,* e due necrologie di Piero GIACOSA inviate dal Prof. L. MASCARELLI.

Il Socio MATTIROLO dà qualche schiarimento sull'importanza notevole dell'omaggio del Willstätter.

Il Socio SOMIGLIANA presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Dott. B. COLOMBO, intitolata: *Sulla propagazione delle onde sismiche in uno strato piano illimitato,* e ne discorre brevemente.

Digitized by Google

LETTURE

Sulla propagazione delle onde sismiche in uno strato piano illimitato.

Nota del Dott. BONAPARTE COLOMBO
presentata dal Socio nazionale residente C. Somigliana.

1. — Le onde di Rayleigh, dette anche superficiali, sono molto importanti nella teoria dei fenomeni sismici, perchè si ritengono atte a rappresentare le onde lunghe, cioè quelle che, in base all'osservazione, sembrano propagarsi con velocità costante sulla superficie terrestre.

Il prof. Somigliana, in due Note molto interessanti (1), ha fatto rilevare in proposito come esse si presentino naturalmente trattando il problema generale della propagazione delle onde piane in un suolo piano illimitato ed infinitamente profondo, ossia in un semispazio. Infatti egli ha dimostrato che alle tre radici dell'equazione di terzo grado di Rayleigh corrispondono onde piane del suolo di tre categorie, e precisamente quelle che risultano dalla sovrapposizione di un'onda longitudinale e di un'onda trasversale, inclinate fra loro in modo da dar luogo ad una identica velocità di propagazione sulla superficie libera del suolo; le onde superficiali di Rayleigh appartengono appunto, senza esaurirla, ad una delle tre categorie che si presenta però in modo singolare.

In questa Nota, studiando semplicemente alcune relazioni funzionali, dimostro che le considerazioni ed i risultati del prof. Somigliana si possono estendere al problema generale della propagazione delle onde sismiche in uno strato piano illi-

(1) SOMIGLIANA, *Sulla propagazione delle onde sismiche* (Nota I^a e II^a), "Rend. Acc. dei Lincei", 1° sem. 1917.

Digitized by Google

mitato, ossia in una lastra a faccie piane parallele di spessore finito, purchè una funzione di una variabile, che compare nel caso del semispazio ed è del tutto arbitraria, soddisfaccia ora alla condizione di ammettere un opportuno periodo; questo dipende dallo spessore della lastra e dalle tangenti trigonometriche degli angoli di emergenza delle coppie di onde che si sovrappongono.

Pertanto la seguente trattazione del problema in esame è completamente diversa da quella del Love [1] e del De Marchi [2].

2. — Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali tale che $z = 0$ e $z = h$ siano le equazioni delle faccie che limitano la lastra di spessore h, e supponiamo che il piano zx sia di propagazione [3] per due diversi sistemi di onde piane, le une longitudinali e le altre trasversali. Siano

$$\alpha_1 x + \gamma_1 z = \text{cost.}, \qquad \alpha_2 x + \gamma_2 z = \text{cost.}$$

le rispettive equazioni dei piani d'onda, necessariamente paralleli all'asse y, e siano

$$(1) \quad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 \Phi (\alpha_1 x + \gamma_1 z - \epsilon_1 t) \\ w_1 = \gamma_1 \Phi (\alpha_1 x + \gamma_1 z - \epsilon_1 t), \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} u_2 = \gamma_2 \psi (\alpha_2 x + \gamma_2 z - \epsilon_2 t) \\ w_2 = -\alpha_2 \psi (\alpha_2 x + \gamma_2 z - \epsilon_2 t) \end{cases}$$

le componenti sugli assi x e z dei rispettivi vettori vibranti; inoltre si osservi che la componente v_1 del primo sull'asse y risulta nulla, essendo per ipotesi longitudinale la relativa onda, e che l'analoga componente v_2 del secondo si può, per sempli-

---

(1) Love, *Some Problems of Geodynamics*, cap. XI.

(2) De Marchi, *Teoria generale delle onde propagate sulla superficie piana di un solido elastico. Applicazione della teoria delle onde superficiali all'analisi dei sismogrammi*, " Rend. Acc. dei Lincei „, 1° sem. 1916.

(3) Per maggiori dettagli si consultino le Note citate del prof. Somigliana.

Digitized by Google

cità, ritenere anche nulla, ciò che è lecito ai nostri scopi. Si noti poi che φ e ψ indicano funzioni, per ora arbitrarie, di argomenti i quali possono evidentemente assumere tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$; e infine che, essendo θ_1 e θ_2 gli angoli di emergenza, ossia gli angoli che le normali ai piani d'onda dei due sistemi formano coll'asse x, valgono le formule

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \qquad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\gamma_2}{\alpha_2}.$$

Se λ e μ sono le costanti elastiche di Lamé e ρ la densità, devono essere vere le relazioni

$$(4) \qquad \frac{\lambda+2\mu}{\rho}(\alpha_1^2+\gamma_1^2) = \epsilon_1^2, \quad \frac{\mu}{\rho}(\alpha_2^2+\gamma_2^2) = \epsilon_2^2, \quad \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\alpha_2},$$

delle quali le prime due risultano dalle equazioni del moto e la terza dall'imporre che coincidano le velocità superficiali di propagazione delle onde longitudinali e trasversali, che sono appunto eguali rispettivamente ad $\frac{\epsilon_1}{\alpha_1}$ e $\frac{\epsilon_2}{\alpha_2}$; il comune valore di questi rapporti si indichi con V.

L'onda che si ottiene sovrapponendo i due sistemi considerati ha per componenti di vibrazione $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$ e $w = w_1 + w_2$; riesce $v = 0$ per l'ipotesi fatta.

Dalle note formule

$$X_z = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$Y_z = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$Z_z = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

dato che devono essere nulle le componenti della tensione elastica relativa ad un qualsiasi elemento piano delle superficie libere, cioè per $z = 0$ e per $z = h$, si ottengono nel nostro caso le condizioni superficiali seguenti:

Digitized by Google

$$(5)\quad \begin{cases} 2\alpha_1\gamma_1\varphi'(\alpha_1 x-\epsilon_1 t)+(\gamma_2^2-\alpha_2^2)\psi'(\alpha_2 x-\epsilon_2 t)=0 \\ [\lambda(\alpha_1^2+\gamma_1^2)+2\mu\gamma_1^2]\varphi'(\alpha_1 x-\epsilon_1 t)-2\mu\alpha_2\gamma_2\psi'(\alpha_2 x-\epsilon_2 t)=0, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} 2\alpha_1\gamma_1\varphi'(\alpha_1 x+\gamma_1 h-\epsilon_1 t)+(\gamma_2^2-\alpha_2^2)\psi'(\alpha_2 x+\gamma_2 h-\epsilon_2 t)=0 \\ [\lambda(\alpha_1^2+\gamma_1^2)+2\mu\gamma_1^2]\varphi'(\alpha_1 x+\gamma_1 h-\epsilon_1 t)-2\mu\alpha_2\gamma_2\psi'(\alpha_2 x+\gamma_2 h-\epsilon_2 t)=0, \end{cases}$$

ove al solito l'apice indica derivazione; la Y_z è senz'altro identicamente nulla.

Prescindendo dal caso banale in cui le funzioni φ e ψ si riducano a costanti, per la compatibilità tanto delle due equazioni (5) quanto delle due equazioni (6) è certo necessario che si abbia

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} 2\alpha_1\gamma_1 & \gamma_2^2-\alpha_2^2 \\ \lambda(\alpha_1^2+\gamma_1^2)+2\mu\gamma_1^2 & -2\mu\alpha_2\gamma_2 \end{vmatrix}=0,$$

ossia

$$(7_1)\qquad 4\mu\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2=[\lambda\alpha_1^2+(\lambda+2\mu)\gamma_1^2](\alpha_2^2-\gamma_2^2).$$

Dimostreremo nel § 3 che, supposta verificata la (7_1), si possono effettivamente soddisfare i sistemi (5) e (6) con funzioni φ e ψ non costanti.

Per ora osserviamo che si possono soddisfare tutte le condizioni (4) e (7_1) nelle costanti α_1, γ_1, ϵ_1, α_2, γ_2, ϵ_2. Invero ricavando dalle prime due delle (4) i valori di $\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2$ e $\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2$ in funzione di V^2 e sostituendoli nella (7_1), dopo averne diviso i due membri per $\alpha_1^2\alpha_2^2$ ed elevato a quadrato, si ottiene un'equazione di quarto grado in V^2; determinato V^2, sono determinati in conseguenza $\left(\frac{\epsilon_1}{\alpha_1}\right)^2$ ed $\left(\frac{\epsilon_2}{\alpha_2}\right)^2$, eguali entrambi a V^2, ed anche $\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2$ e $\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2$ (1).

L'equazione ottenuta per V^2 è quella stessa cui è giunto

---

(1) Con riguardo ai segni per i rapporti $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$, $\frac{\epsilon_1}{\alpha_1}$, $\frac{\gamma_2}{\alpha_2}$, $\frac{\epsilon_2}{\alpha_2}$ si possono effettivamente soddisfare le (4) e (7_1); α_1 ed α_2 restano ancora arbitrarî.

Digitized by Google

il Rayleigh ricercando la velocità di propagazione delle sue onde superficiali; essa, quando si sopprima la radice $V^2 = 0$ e si ponga $V^2 = \frac{\mu}{\rho}\eta$, assume la nota forma

$$(8) \qquad \eta^3 - 8\eta^2 + 8\left(3 - 2\,\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right)\eta - 16\left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right) = 0,$$

studiata dal prof. Somigliana.

Ricordando le (3) e le (4), si ricavano le formule

$$(9) \qquad \mathrm{tg}^2\theta_1 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\,\eta - 1, \qquad \mathrm{tg}^2\theta_2 = \eta - 1.$$

3. — Esaminiamo ora i sistemi (5) e (6), supposta naturalmente vera la (7_1), oltre alle (4): ponendo per semplicità

$$A = \alpha_2^2 - \gamma_2^2, \qquad B = 2\alpha_1\gamma_1,$$

essi si soddisfano con funzioni φ' e ψ' tali che valgano le relazioni funzionali

$$(10) \qquad \frac{\varphi'(\alpha_1 x - \epsilon_1 t)}{\psi'(\alpha_2 x - \epsilon_2 t)} = \frac{A}{B},$$

$$(11) \qquad \frac{\varphi'(\alpha_1 x + \gamma_1 h - \epsilon_1 t)}{\psi'(\alpha_2 x + \gamma_2 h - \epsilon_2 t)} = \frac{A}{B} \quad (1).$$

Ponendo poi

$$(12) \qquad \varphi'(\zeta) = AG'\left(\frac{\zeta}{\alpha_1}\right), \qquad \psi'(\zeta) = BF'\left(\frac{\zeta}{\alpha_2}\right),$$

le quali introducono semplicemente un opportuno cambiamento di simboli funzionali, le (10) e (11) si mutano nelle relazioni equivalenti

$$(10_1) \qquad G'(x - Vt) = F'(x - Vt),$$

$$(11_1) \qquad G'\left(x - Vt + \frac{\gamma_1}{\alpha_1}h\right) = F'\left(x - Vt + \frac{\gamma_2}{\alpha_2}h\right).$$

---

(1) Omettiamo la trattazione, estremamente semplice, dei casi speciali in cui riesce $A = 0$ oppure $B = 0$. Pertanto riteniamo senz'altro $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

Digitized by Google

La (10_1) si soddisfa, comunque si fissi la funzione $F'(\xi)$, con $G'(\xi) = F'(\xi)$, e la (11_1) si soddisfa in conseguenza quando sia verificata la condizione

$$F'\left(x - Vt + \frac{\gamma_1}{\alpha_1} h\right) = F'\left(x - Vt + \frac{\gamma_2}{\alpha_2} h\right),$$

ossia

$$F'\left(\xi + \frac{\gamma_1}{\alpha_1} h\right) = F'\left(\xi + \frac{\gamma_2}{\alpha_2} h\right),$$

od ancora in definitiva

$$F'(\xi + k) = F'(\xi) \tag{13}$$

con

$$k = \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right) h. \tag{14}$$

In conclusione:

Per soddisfare le (10_1) e (11_1) è necessario e sufficiente che sia $G'(\xi) = F'(\xi)$ e che $F'(\xi)$ sia una *funzione periodica arbitraria di periodo k.*

Perciò, ricordando le (12), si trae:

Per soddisfare le (10) *e* (11), *vale a dire le* (5) *e* (6), *è necessario e sufficiente che sia*

$$\varphi'(\zeta) = AF'\left(\frac{\zeta}{\alpha_1}\right), \qquad \psi'(\zeta) = BF'\left(\frac{\zeta}{\alpha_2}\right), \tag{15}$$

indicando $F'(\xi)$ *una funzione periodica arbitraria di periodo k.*

Le (15) porgono poi

$$\varphi(\zeta) = \alpha_1 AF\left(\frac{\zeta}{\alpha_1}\right) + M, \quad \psi(\zeta) = \alpha_2 BF\left(\frac{\zeta}{\alpha_2}\right) + N \quad (M, N = \text{cost.});$$

sostituendo nelle (1) e (2) si ottengono le componenti delle vibrazioni. Si osservi infine che dalla (13) si ricava

$$F(\xi + k) = F(\xi) + C \qquad (C = \text{cost.}).$$

Digitized by Google

4. — Abbiamo stabilito che la funzione $F'(\xi)$, del tutto arbitraria nel caso del suolo piano illimitato e infinitamente profondo, deve invece essere periodica, con periodo k, nel caso dello strato piano illimitato. Vogliamo ora fare qualche considerazione sul periodo.

In grazia alle (3) e alla (14) esso vale

$$k = (\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1)\, h$$

e, per le (9), può anche esprimersi in funzione della corrispondente radice η di (8). Volendo però evitare i radicali, si deve calcolare k^2 e tenere conto della (7_1) scritta nella forma

$$(7_2) \quad 4\mu \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 = [\lambda + (\lambda + 2\mu)\operatorname{tg}^2\theta_1](1 - \operatorname{tg}^2\theta_2)\,;$$

eseguendo i calcoli si ricava

$$k^2 = \left(\frac{1}{2}\,\eta^2 - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\eta\right) h^2.$$

Infine osserviamo che, supposte reali $\operatorname{tg}\theta_1$ e $\operatorname{tg}\theta_2$ [1], il modulo del periodo è maggiore dello spessore della lastra, almeno nel caso in cui il coefficiente di Poisson vale $\frac{1}{4}$ ossia in cui è $\lambda = \mu$ (caso ammesso come tipico dai sismologi). Infatti, anche senza determinare η, si ponga $\operatorname{tg}\theta_2 = \operatorname{tg}\theta_1 + \tau$ e si sostituisca questo valore nella relazione

$$(\lambda + 2\mu)(\operatorname{tg}^2\theta_1 + 1) = \mu(\operatorname{tg}^2\theta_2 + 1)$$

ottenuta dalle (9); si ricava precisamente

$$(\lambda + \mu)\operatorname{tg}^2\theta_1 - 2\mu\tau \operatorname{tg}\theta_1 + \lambda + \mu - \mu\tau^2 = 0\,,$$

---

[1] Anzi basta supporre reale $\operatorname{tg}\theta_1$ perchè lo sia anche $\operatorname{tg}\theta_2$; ciò risulta dalle (9) e dalle note diseguaglianze in λ e μ: $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, da cui $\lambda + 2\mu > 0$, $\lambda + \mu > 0$.

Digitized by Google

equazione di secondo grado in $\operatorname{tg}\theta_1$, il cui discriminante

$$\mu(\lambda + 2\mu)\tau^2 - (\lambda + \mu)^2,$$

per l'ipotesi fatta, deve riuscire positivo; allora risulta

$$\tau^2 > \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)},$$

e perciò, per $\lambda = \mu$,

$$\tau^2 > \frac{4}{3} \qquad |\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1| > 1 \quad \text{e} \quad |k| > h.$$

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 30 Dicembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL SENATORE ENRICO D'OVIDIO
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, SACCO, POCHETTINO e il Segretario REPOSSI.

Scusano la loro assenza il Presidente PARONA e il Direttore di Classe GRASSI.

Il verbale della adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio D'OVIDIO, assumendo la presidenza, porge ai Soci presenti, ed agli assenti, gli auguri pel nuovo anno, a nome del Presidente PARONA, del Direttore di Classe GRASSI e suo: auguri che i Soci presenti ricambiano di gran cuore.

Il Socio SACCO presenta in omaggio all'Accademia il volume XVII del periodico " Urania „.

Il Socio GARELLI, a proposito del processo verbale dell'ultima seduta, dal quale risulta che il Socio MAJORANA, presentando all'Accademia i due volumi degli *Atti del Congresso internazionale dei Fisici* tenutosi lo scorso anno a Como, Pavia e Roma, in occasione del primo centenario della morte di Alessandro Volta, comunicò che " il Congresso, udita una comuni-

Digitized by Google

" cazione del prof. Amerio documentante che il Volta riconobbe " per primo la costanza del coefficiente di dilatazione dell'aria, " fece unanime voto perchè d'ora innanzi nell'espressione della " legge di dilatazione dei gas si unisse al nome di Gay-Lussac " quello del grande fisico comasco „, fa rilevare che sin dal 1912 il nostro compianto Socio Icilio GUARESCHI, a proposito della legge sulla uniforme dilatazione dell'aria di Alessandro Volta, aveva rivendicato al grande fisico lombardo la priorità della detta legge, proponendo che in suo onore venisse denominata " legge di Volta e Gay-Lussac „, volendo così porre in evidenza che al Volta spettava la priorità della scoperta della legge dell'uniforme dilatazione dell'aria e al Gay-Lussac l'estensione della stessa agli altri gas.

Una prima pubblicazione di questo lavoro comparve nel Supplem. annuale all'" Enc. di Chimica „ diretta dallo stesso Guareschi, ed inoltre nell' " Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik „, 1913-1914, vol. V, pagine 142-154 e 209-225.

In seguito in un lavoro di grande mole intitolato *Notizie storiche sulla legge della dilatazione dei gas di Volta*, pubblicato nel Suppl. annuale del 1913-14, non solo ha confermato le osservazioni precedenti, ma a dar maggior risalto al merito di Volta riprodusse, annotandola, la memoria originale di Volta.

Digitized by Google

Adunanza del 13 Gennaio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, GRASSI, PANETTI, SOMIGLIANA, PONZIO, SACCO, HERLITZKA, POCHETTINO, GARELLI e il Segretario REPOSSI.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio SACCO presenta in omaggio all'Accademia un suo opuscolo dal titolo: *Il carbon fossile di Bagnone.*

In seguito il Socio SOMIGLIANA presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Prof. A. TONOLO sulla: *Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dello spazio* S_4.

Il Socio GARELLI presenta poi una Nota del Prof. M. GIUA, dal titolo: *Ricerche sopra alcune reazioni di condensazione*, e la commenta brevemente.

Il Presidente infine, accennando alla prossima ripresa della stampa delle *Memorie,* ricorda ai Soci che già da parecchi anni giace presso l'Accademia la terza parte dello studio di A. TERRACCIANO sulla *Flora sarda*, le cui parti precedenti furono già pubblicate nelle *Memorie* dell'Accademia. Propone quindi che si provveda alla pubblicazione anche di questa ultima parte, sulla quale è già stato dato parere favorevole dalla Commissione a questo scopo nominata, e la consegna al Socio MATTIROLO perchè la riprenda brevemente in esame.

Digitized by Google

LETTURE

Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dello spazio S_4.

Nota di ANGELO TONOLO
presentata dal Socio nazionale residente Carlo Somigliana.

Si consideri una superficie Σ dello spazio lineare S_4, il cui spazio 2-tangente in ogni punto P di Σ sia a quattro dimensioni. In questo spazio 2-tangente vi è un piano normale, nel senso che ogni sua retta passante per P è normale a Σ in questo punto. Si può allora porre la quistione di cercare in questo piano una coppia di normali ortogonali fra loro da ritenersi privilegiata rispetto alle infinite altre coppie passanti per P. È questo il problema che si è proposto il Prof. VITALI, e che ha avuto da Lui elegante risoluzione per tutte le superficie dello spazio hilbertiano il cui spazio 2-tangente è a quattro o a cinque dimensioni (1).

Secondo questo Autore (limitandomi alle superficie prese in esame nella presente Nota), la definizione di coppia privilegiata di normali ortogonali deve essere tale da risultare simmetrica rispetto alle medesime. Per le superficie Σ dello spazio S_4, sono

(1) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*, "Annales de la Société polonaise de mathématique", t. VII (1928). È ovvio che per le superficie dello spazio hilbertiano, il cui spazio 2-tangente è a cinque dimensioni, bisognerà cercare una terna privilegiata di normali ortogonali fra loro due a due. Avverto che in una seconda Memoria, pubblicata negli stessi "Annales", t. VII (1928), il Prof. VITALI ha risolto l'analoga quistione per ogni varietà dello spazio hilbertiano.

Digitized by Google

riuscito a determinare una simile coppia la quale, in generale, non coincide con quella del VITALI. E poichè la sua determinazione si fa in base a considerazioni geometriche assai semplici, ho creduto opportuno renderla nota a mezzo della presente comunicazione.

1. Preliminari. — Nello spazio lineare S_4, i cui punti sono riferiti ad un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, z, t, si consideri una superficie Σ di equazioni parametriche

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} x &= x(u, v)\\ y &= y(u, v)\\ z &= z(u, v)\\ t &= t(u, v), \end{aligned}\right.$$

il cui spazio 2-tangente sia a quattro dimensioni in ogni punto di Σ.

Sia

$$(2)\qquad a_{11}\,du^2 + 2a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2$$

la forma che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare di Σ, ove si è posto [2]:

$$(3)\qquad a_{rs} = S\,x_r'\,x_s' \qquad (r, s = 1, 2),$$

indicando con x_1', x_2' rispettivamente le derivate x_u', x_v'. Diciamo a il discriminante della forma (2).

Sia P un punto qualsivoglia di Σ, e indichiamo con X_3, Y_3, Z_3, T_3; X_4, Y_4, Z_4, T_4 i coseni direttori di due direzioni del piano normale a Σ in P passanti per questo punto e fra loro perpendicolari.

---

[2] Il simbolo S rappresenta una somma di quattro termini che si ottengono da quello scritto sotto il segno, mutando successivamente x, o la funzione che si riferisce all'asse delle x, rispettivamente in y, z, t, o nelle funzioni analoghe che sono relative agli assi y, z, t.

Digitized by Google

Se denotiamo con x_{11}, x_{12}, x_{22} le derivate seconde covarianti x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} della funzione x rispetto alla forma (2), valgono le formule seguenti:

$$x_{rs} = f_{rs}\, X_3 + g_{rs}\, X_4 \tag{4}$$

(e analoghe naturalmente per le derivate covarianti di y, z, t), dove

$$f_{rs} = S\, X_3\, x_{rs}, \qquad (6)\ g_{rs} = S\, X_4\, x_{rs} \tag{5}$$

sono due tensori doppi simmetrici covarianti.

Alla forma differenziale (2), associamo le seguenti

$$f_{11}\, du^2 + 2f_{12}\, du\, dv + f_{22}\, dv^2, \tag{7}$$

$$g_{11}\, du^2 + 2g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2. \tag{8}$$

In seguito si vedrà che nelle formule finali, entreranno in giuoco soltanto dei tensori calcolati con i coefficienti delle forme (2), (7), (8).

2. Determinazione di una particolare coppia ortogonale di normali della superficie Σ. — Il punto generico P di Σ considerato nel n° precedente, abbia per coordinate curvilinee u, v, e per coordinate cartesiane x, y, z, t. Indichiamo con π il piano tangente, e con ν il piano normale a Σ nel punto P. Le equazioni del piano ν si possono scrivere così:

$$\begin{cases} S(\xi - x)\, x_1' = 0 \\ S(\xi - x)\, x_2' = 0, \end{cases} \tag{9}$$

dove ξ, η, ζ, τ indicano le coordinate correnti dei punti del piano ν.

Sia P' un punto di Σ infinitamente vicino a P di coordinate curvilinee $u + du$, $v + dv$, e di coordinate cartesiane $x + dx$, ..., $t + dt$.

Le equazioni del piano normale ν′ a Σ nel punto P', saranno:

Digitized by Google

$$(10)\quad \begin{cases} S(\xi - x - dx)(x_1' + x_{11}''\,du + x_{12}''\,dv + \theta_2) = 0 \\ S(\xi - x - dx)(x_2' + x_{21}''\,du + x_{22}''\,dv + \theta_2^*) = 0\,. \end{cases}$$

dove θ_2 e θ_2^* rappresentano termini di second'ordine almeno nei differenziali du, dv e x_{11}'', x_{12}'', x_{22}'' sono le derivate seconde ordinarie della funzione x. Sostituiamo al posto del dx la sua espressione $x_1'\,du + x_2'\,dv$, e poi sviluppiamo i prodotti che figurano nelle (10), tenendo conto soltanto dei termini che sono di primo ordine nei differenziali du, dv. Allora, in forza delle (3) e delle (9), le (10) diventano:

$$(11)\quad \begin{cases} S(\xi - x)(x_{11}''\,du + x_{12}''\,dv) = a_{11}\,du + a_{12}\,dv \\ S(\xi - x)(x_{21}''\,du + x_{22}''\,dv) = a_{21}\,du + a_{22}\,dv\,, \end{cases}$$

alle quali conviene dare un'altra forma. Denotiamo con $\left\{ \begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right\}$ i simboli di Christoffel di seconda specie relativi alla forma (2), e ricordiamo che

$$(12)\qquad x_{rs} = x_{rs}'' - \sum_1^2{}_t \left\{ \begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right\} x_t'.$$

Poniamo nelle equazioni (11) le derivate seconde ordinarie con le loro espressioni ricavate dalle (12): a causa delle (9), le (11) risultano le seguenti:

$$(13)\quad \begin{cases} S(\xi - x)(x_{11}\,du + x_{12}\,dv) = a_{11}\,du + a_{12}\,dv \\ S(\xi - x)(x_{21}\,du + x_{22}\,dv) = a_{21}\,du + a_{22}\,dv\,. \end{cases}$$

Infine, sostituendo in queste al posto delle derivate covarianti i secondi membri delle (4), si traggono le formule finali:

$$(14)\quad \begin{cases} S(\xi - x)\,\{(f_{11}\,du + f_{12}\,dv)\,X_3 + (g_{11}\,du + g_{12}\,dv)\,X_4\,\} = \\ \qquad = a_{11}\,du + a_{12}\,dv \\ S(\xi - x)\,\{(f_{21}\,du + f_{22}\,dv)\,X_3 + (g_{21}\,du + g_{22}\,dv)\,X_4\,\} = \\ \qquad = a_{21}\,du + a_{22}\,dv. \end{cases}$$

Digitized by Google

Per risolvere il sistema formato dalle (9) e (14) rispetto alle differenze $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, $t - \tau$, conviene sostituire le due prime equazioni con altre equivalenti nel modo seguente: indichiamo con X_1, Y_1, Z_1, T_1; X_2, Y_2, Z_2, T_2 i coseni direttori delle tangenti a due linee di Σ passanti per P e ortogonali fra loro. Allora le due equazioni (9) possono venire rimpiazzate dalle

$$(15) \quad \begin{cases} S(\xi - x) X_1 = 0 \\ S(\xi - x) X_2 = 0 , \end{cases}$$

e il sistema delle (15) e (14), sarà equivalente al sistema (9), (14).

Notiamo ora che il determinante

$$(16) \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & T_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & T_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & T_4 \end{vmatrix}$$

è ortogonale (e noi lo supporremo di valore uno). Vedremo subito come questo fatto faciliti i calcoli per la risoluzione del sistema (15), (14) rispetto alle differenze $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, $\tau - t$.

Con questa risoluzione noi verremo a determinare il punto d'incontro Q dei due piani normali ν e ν'.

Calcoliamo intanto il determinante B dei coefficienti delle differenze $\xi - x$, ..., $\tau - t$.

Abbiamo:

$$B = \begin{vmatrix} X_1 & \dots \\ X_2 & \dots \\ (f_{11}\,du + f_{12}\,dv) X_3 + (g_{11}\,du + g_{12}\,dv) X_4 & \dots \\ (f_{21}\,du + f_{22}\,dv) X_3 + (g_{21}\,du + g_{22}\,dv) X_4 & \dots \end{vmatrix} .$$

Ovviamente si vede che B è uguale alla somma di

Digitized by Google

quattro determinanti, dei quali due sono nulli, e gli altri due valgono

$$(f_{11}\,du + f_{12}\,dv)\,(g_{21}\,du + g_{22}\,dv),$$

$$-(f_{21}\,du + f_{22}\,dv)\,(g_{11}\,du + g_{12}\,dv),$$

perchè il determinante (16) è uguale a uno. Abbiamo perciò:

$$(17)\qquad B = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} dv^2.$$

Le direzioni PP' (reali od immaginarie) per cui B si annulla in P, sono determinate dalla equazione

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} dv^2 = 0.$$

Osservo che il primo membro di questa equazione (18), all'infuori di un fattore, coincide con la forma F_2 di Fubini [3] relativa alle superficie dello spazio S_4. Notiamo ancora che non può mai accadere che siano tutti nulli in P i minori di second'ordine che figurano nella (18): infatti, nel caso opposto, le due forme (7), (8) sarebbero proporzionali, e allora la superficie Σ nel punto P non avrebbe il suo spazio 2-tangente di quattro dimensioni.

Risolviamo ora il sistema (15), (14), limitando la esplicita risoluzione alla differenza $\xi - x$. Si ha:

$$(19)\qquad \xi - x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Y_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & Y_2 & \cdot & \cdot \\ a_{11}\,du + a_{12}\,dv & y_{11}\,du + y_{12}\,dv & \cdot & \cdot \\ a_{21}\,du + a_{22}\,dv & y_{21}\,du + y_{22}\,dv & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} dv^2}.$$

---

[3] G. Fubini, E. Čech, *Geometria proiettiva differenziale* [Bologna, Nicola Zanichelli, in due tomi, 1926 e 1927]. Tomo secondo, pag. 632.

Digitized by Google

Detto A il determinante numeratore della (19), si trae:

$$(20)\quad A=(a_{11}\,du+a_{12}\,dv)\begin{vmatrix} Y_1 & \cdot\cdot \\ Y_2 & \cdot\cdot \\ y_{21}\,du+y_{22}\,dv & \cdot\cdot \end{vmatrix}-(a_{21}\,du+a_{22}\,dv)\begin{vmatrix} Y_1 & \cdot\cdot \\ Y_2 & \cdot\cdot \\ y_{11}\,du+y_{12}\,dv & \cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

Diciamo A_1 e A_2 i due determinanti che figurano nella (20): prendiamo in considerazione A_1, e in esso surroghiamo le derivate covarianti con le loro espressioni (4); si ha:

$$(21)\quad A_1=(f_{21}\,du+f_{22}\,dv)\begin{vmatrix} Y_1 & \cdot\cdot \\ Y_2 & \cdot\cdot \\ Y_3 & \cdot\cdot \end{vmatrix}+(g_{21}\,du+g_{22}\,dv)\begin{vmatrix} Y_1 & \cdot\cdot \\ Y_2 & \cdot\cdot \\ Y_4 & \cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

Poichè nel determinante (16) ogni elemento è uguale al proprio complemento algebrico, abbiamo anche:

$$(22)\quad A_1=-(f_{21}\,du+f_{22}\,dv)\,X_4+(g_{21}\,du+g_{22}\,dv)\,X_3.$$

Procedendo in modo analogo, si trova:

$$(23)\quad A_2=-(f_{11}\,du+f_{12}\,dv)\,X_4+(g_{11}\,du+g_{12}\,dv)\,X_3.$$

Perciò, sostituendo in (20), le (22) e (23), si ricava:

$$A=\left\{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}du^2+\begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix}du\,dv+\begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}dv^2\right\}X_4-$$
$$-\left\{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}du^2+\begin{vmatrix} g_{11} & g_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix}du\,dv+\begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}dv^2\right\}X_3.$$

E infine la formula:

$$(24)\quad \xi-x=\frac{\left\{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}du^2+\cdot\cdot\right\}X_4-\left\{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}du^2+\cdot\cdot\right\}X_3}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix}du^2+\begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix}du\,dv+\begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}dv^2}.$$

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Diamo ora forma invariantiva al secondo membro della (24): introduciamo perciò i tre seguenti sistemi di funzioni:

$$(25)\qquad F_{11} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,, \quad F_{12} = F_{21} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,,$$

$$F_{22} = \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,;$$

$$(26)\qquad G_{11} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,, \quad G_{12} = G_{21} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,,$$

$$G_{22} = \begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,;$$

$$(27)\qquad H_{11} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,, \quad H_{12} = H_{21} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,,$$

$$H_{22} = \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,;$$

e dimostriamo che essi costituiscono tre tensori doppi (simmetrici) covarianti. Limitiamo la dimostrazione al sistema F_{ij}. Sarà comodo ora indicare con u_1, u_2 le variabili u, v. Eseguiamo una qualsivoglia trasformazione di variabili

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} u_1 = u_1(v_1, v_2) \\ u_2 = u_2(v_1, v_2) \end{cases}$$

a determinante funzionale non nullo, e — adoperando le notazioni del VITALI — indichiamo con $F_{ij}[u]$ le funzioni F_{ij} definite dalle (25), nelle variabili u e con $F_{ij}[v]$ le trasformate delle F_{ij} a mezzo della sostituzione (α). Poniamo ancora:

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_{ij}}{\partial v_{hk}} = \dfrac{\partial u_i}{\partial v_h}\dfrac{\partial u_j}{\partial v_k} + \dfrac{\partial u_i}{\partial v_k}\dfrac{\partial u_j}{\partial v_h} & \text{se } i \neq j, \\ \dfrac{\partial u_{ij}}{\partial v_{hk}} = \dfrac{\partial u_i}{\partial v_h}\dfrac{\partial u_j}{\partial v_k} & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Digitized by Google

Con queste notazioni, è notorio che si ha:

$$(29)\qquad \begin{cases} a_{ij}[v] = \sum'_{rs} a_{rs}[u] \frac{\partial u_{rs}}{\partial v_{ij}}, \\ f_{ij}[v] = \sum'_{rs} f_{rs}[u] \frac{\partial u_{rs}}{\partial v_{ij}}, \end{cases}$$

avendo indicato con Σ' la somma di tre termini che si ottengono da quello scritto, obbligando la coppia rs ad assumere soltanto le combinazioni con ripetizione 11, 12, 22.

Vediamo ora come si trasforma $F_{11}[u]$ a mezzo della sostituzione (α). È:

$$(30)\qquad F_{11}[v] = \begin{vmatrix} f_{11}[v] & f_{12}[v] \\ a_{11}[v] & a_{12}[v] \end{vmatrix} : \sqrt{a}[v].$$

In forza delle (29), e ricordando che

$$(31)\qquad \sqrt{a}[v] = \sqrt{a}[u] \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)},$$

possiamo scrivere la (30) così:

$$(32)\qquad F_{11}[v] = \frac{\begin{Vmatrix} f_{11}[u] & f_{12}[u] & f_{22}[u] \\ a_{11}[u] & a_{12}[u] & a_{22}[u] \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{11}} & \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{11}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{11}} \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{12}} & \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{12}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{12}} \end{Vmatrix}}{\sqrt{a}[u] \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)}}.$$

Il prodotto delle due matrici che figura nel numeratore del secondo membro della (32) è uguale alla somma dei prodotti dei determinanti

Digitized by Google

$$(33)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \left|\begin{matrix} f_{11}[u] & f_{12}[u] \\ a_{11}[u] & a_{12}[u] \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{11}} & \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{11}} \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{12}} & \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{12}} \end{matrix}\right| + \\ \left|\begin{matrix} f_{11}[u] & f_{22}[u] \\ a_{11}[u] & a_{22}[u] \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{11}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{11}} \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{12}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{12}} \end{matrix}\right| + \\ \left|\begin{matrix} f_{12}[u] & f_{22}[u] \\ a_{12}[u] & a_{22}[u] \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{11}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{11}} \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{12}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{12}} \end{matrix}\right| , \end{array} \right.$$

che rispettivamente chiameremo m, n, p.

Prendiamo in considerazione il prodotto m; si ha, a causa delle posizioni (25), (28):

$$(34)\qquad m = \sqrt{a[u]}\; F_{11}[u] \left|\begin{matrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\right)^2 & 2\,\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\,\frac{\partial u_2}{\partial v_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial v_1}\,\frac{\partial u_1}{\partial v_2} & \frac{\partial u_1}{\partial v_1}\,\frac{\partial u_2}{\partial v_2} + \frac{\partial u_1}{\partial v_2}\,\frac{\partial u_2}{\partial v_1} \end{matrix}\right| .$$

Sviluppando il determinante della (34), si trova:

$$(35)\qquad m = \sqrt{a[u]}\; \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)}\; F_{11}[u] \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\right)^2 .$$

Analogamente si hanno le formule:

$$(36)\qquad n = \sqrt{a[u]}\; \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)}\; 2F_{12}[u]\; \frac{\partial u_1}{\partial v_1}\,\frac{\partial u_2}{\partial v_1} ,$$

$$(37)\qquad p = \sqrt{a[u]}\; \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)}\; F_{22}[u] \left(\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\right)^2 .$$

Sostituendo le (35), (36), (37) nella (32), si trae:

$$(38)\qquad F_{11}[v] = \sum{}'_{rs} F_{rs}[u] \frac{\partial u_{rs}}{\partial v_{11}} .$$

Digitized by Google

Similmente si dimostrano le relazioni

$$F_{12}[v] = \sum'_{rs} F_{rs}[u] \frac{\partial u_{rs}}{\partial v_{12}}, \tag{39}$$

$$F_{22}[v] = \sum'_{rs} F_{rs}[u] \frac{\partial u_{rs}}{\partial v_{22}}. \tag{40}$$

Le (38), (39), (40) provano che le $F_{rs}[u]$ definite dalle posizioni (25) formano un tensore doppio covariante, *c. d. d.*

Ritorniamo ora alle variabili u, v, e dividiamo numeratore e denominatore della (24) per $\sqrt{a}$; indi introduciamo le notazioni (25), (26), (27) si ha:

$$\xi - x = \frac{(F_{11}du^2 + 2F_{12}du\,dv + F_{22}dv^2)X_4 - (G_{11}du^2 + 2G_{12}du\,dv + G_{22}dv^2)X_3}{H_{11}du^2 + 2H_{12}du\,dv + H_{22}dv^2}, \tag{41}$$

nella quale è manifesto il carattere invariantivo di fronte a qualsiasi cambiamento delle variabili u, v.

Poniamo:

$$\mu = F_{11}\,du^2 + 2F_{12}\,du\,dv + F_{22}\,dv^2, \tag{42}$$

$$\lambda = G_{11}\,du^2 + 2G_{12}\,du\,dv + G_{22}\,dv^2, \tag{43}$$

$$\nu = H_{11}\,du^2 + 2H_{12}\,du\,dv + H_{22}\,dv^2. \tag{44}$$

Allora, la (41) assume l'aspetto

$$\xi - x = \frac{\mu X_4 - \lambda X_3}{\nu}. \tag{45}$$

Le coordinate ξ, η, ζ, τ del punto d'incontro dei due piani normali alla superficie Σ nei punti P e P' si ricavano pertanto dalla (45) e dalle tre seguenti:

$$\eta - y = \frac{\mu Y_4 - \lambda Y_3}{\nu}, \tag{46}$$

$$\zeta - z = \frac{\mu Z_4 - \lambda Z_3}{\nu}, \tag{47}$$

$$\tau - t = \frac{\mu T_4 - \lambda T_3}{\nu}. \tag{48}$$

Digitized by Google

Consideriamo il determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix},$$

e supponiamo che esso sia nullo. Valgono allora le relazioni

$$F_{11} : F_{12} : F_{22} = G_{11} : G_{12} : G_{22} = H_{11} : H_{12} : H_{22}.$$

Ne consegue in forza delle (45), (46), (47), (48) che il punto Q resta fisso al variare della direzione PP' attorno a P. Viceversa se avviene questo fatto, valgono le precedenti relazioni di proporzionalità, e quindi il determinante D ha valore zero.

In ciò che segue noi supporremo che D non sia nullo. Aggiungiamo che questo carattere si conserva, sia per cambiamenti delle coordinate u, v, sia per quelli delle direzioni $X_3, \ldots, T_3$; $X_4, \ldots, T_4$.

Seguiamo ora il criterio del VITALI [4] per determinare una coppia di normali passanti per il punto P ortogonali fra loro che risponda ad una definizione simmetrica rispetto alle due rette. Dividiamo allora la (43) per la (42); si ha:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{G_{11}\,du^2 + 2G_{12}\,du\,dv + G_{22}\,dv^2}{F_{11}\,du^2 + 2F_{12}\,du\,dv + F_{22}\,dv^2}. \tag{49}$$

Questa ci dice che fissato un valore al rapporto $\frac{dv}{du}$, cioè assegnata una direzione sul piano tangente π in P alla superficie Σ, resta fissato un valore per $\frac{\lambda}{\mu}$, e quindi una direzione sul piano normale ν di Σ nel punto P. Invece, ad ogni valore del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, cioè ad ogni direzione passante per P del piano ν, corrispondono due valori del rapporto $\frac{dv}{du}$, cioè due direzioni del piano tangente π passanti per P. Queste due direzioni possono naturalmente essere tutte e due reali, o coinci-

---

[4] Cfr. G. VITALI, loc. cit. [1], pag. 64.

Digitized by Google

dere, od essere immaginarie. Interessa fissare quelle direzioni (eventualmente immaginarie) passanti per P del piano normale ν, alle quali corrispondono sul piano π due direzioni che coincidono. Queste rette si determinano, cercando i valori del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ che annullano il discriminante della equazione

$$(\lambda F_{11} - \mu G_{11})\, du^2 + 2\,(\lambda F_{12} - \mu G_{12})\, du\, dv + \\ + (\lambda F_{22} - \mu G_{22})\, dv^2 = 0\,;$$

questi valori $\frac{\lambda}{\mu}$ sono pertanto radici della equazione

$$(50) \qquad \begin{vmatrix} \lambda F_{11} - \mu G_{11} & \lambda F_{12} - \mu G_{12} \\ \lambda F_{12} - \mu G_{12} & \lambda F_{22} - \mu G_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Adoperando una denominazione del VITALI chiameremo *normali doppie* quelle normali di ν individuate dalle radici $\frac{\lambda}{\mu}$ della equazione (50).

Dimostriamo che le nostre normali doppie sono certamente immaginarie (5). Basterà provare che il discriminante della equazione (50) è negativo. Per questo, ricordiamo che effettuando una qualunque trasformazione di variabili u, v (a determinante funzionale non nullo), il discriminante dell'equazione (50) trasformata, è uguale al prodotto del discriminante dell'equazione primitiva per il quadrato del determinante funzionale della trasformazione adoperata. Cosicchè, per ciò che riguarda il segno di questo discriminante, basterà riferirsi ad una particolare scelta di variabili u, v. E noi, allora, approfittando del fatto che la forma (2) è definita (positiva), prenderemo come variabili u, v quelle che rendono le forme (2), (7) simultaneamente ortogonali. Con queste variabili, avendo

$$a_{12} = f_{12} = 0\,;\; F_{11} = F_{22} = 0\,;\; G_{11} = -a_{11}\, g_{12},\; G_{22} = a_{22}\, g_{12},$$

(5) Le normali doppie del VITALI possono anche essere reali.

Digitized by Google

il discriminante della equazione (50) diventa uguale a

$$-4a_{11}\ a_{22}\ g^2_{12}\ F^2_{12}.$$

Ora nè g_{12}, nè F_{12} possono annullarsi, perchè nel caso opposto sarebbe nullo il determinante D: il discriminante della (50) è certamente negativo, essendo positivi a_{11}, a_{22}.

Queste normali doppie possono essere le rette cicliche del piano v.

Escluso questo ultimo caso, le normali doppie dividono v in due angoli. Le bisettrici del loro angolo sono sempre reali e perpendicolari fra loro. *Queste bisettrici allora formano una coppia di normali in* P *alla superficie* Σ *che gode della proprietà di simmetria richiesta.*

3. Caso delle superficie cicliche. — Se le normali doppie sono le rette cicliche del piano v, dovendo l'equazione (50) essere equivalente all'equazione

$$\lambda^2 + \mu^2 = 0,$$

dovrà essere, qualunque sia la coppia $X_3, \ldots, T_3;\ X_4, \ldots, T_4$,

$$F_{11}\ F_{22} - F_{12}^2 = G_{11}\ G_{22} - G_{12}^2, \tag{51}$$

$$F_{11}\ G_{22} - 2F_{12}\ G_{12} + F_{22}\ G_{11} = 0. \tag{52}$$

Chiamiamo *punto ciclico* un punto P di Σ nel quale le normali doppie sono le rette cicliche del piano normale in P alla superficie Σ, e *superficie ciclica* una superficie nella quale i punti sono tutti ciclici. Un interessante esempio di superficie che hanno questa proprietà, ci è offerto dalle *superficie riemanniane di* KOMMERELL (6).

(6) Nella Nota del VITALI si prova (pagg. 65-67) che queste superficie sono pure cicliche secondo il criterio seguito da questo Autore per definire una coppia privilegiata di normali.

Digitized by Google

Come equazioni di queste superficie, noi assumiamo le seguenti:

$$(53)\qquad \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u, v) \\ t = t(u, v), \end{cases}$$

dove $z + it$ è funzione della variabile complessa $u + iv$. Proviamo che esse sono cicliche: basterà provare che per esse sussistono le (51), (52).

Tenendo presenti le relazioni di monogeneità

$$z_u' = t_v', \qquad z_v' = -t_u',$$

si trova:

$$(54)\qquad ds^2 = (1 + \Delta)(du^2 + dv^2),$$

avendo posto:

$$\Delta = z_u'^2 + z_v'^2.$$

Per le derivate seconde covarianti delle funzioni (53) rispetto alla forma (54), si hanno le espressioni:

$$(55)\qquad \begin{cases} x_{uu} = -\frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)}, \quad x_{uv} = -\frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)}, \quad x_{vv} = \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)}; \\ y_{uu} = \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)}, \quad y_{uv} = -\frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)}, \quad y_{vv} = -\frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)}; \\ z_{uu} = z_{uu}'' - \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} z_u' + \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} z_v', \\ z_{uv} = z_{uv}'' - \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} z_u' - \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} z_v', \\ z_{vv} = z_{vv}'' + \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} z_u' - \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} z_v', \\ t_{uu} = t_{uu}'' - \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} t_u' + \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} t_v', \\ t_{uv} = t_{uv}'' - \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} t_u' - \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} t_v', \\ t_{vv} = t_{vv}'' + \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} t_u' - \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} t_v'. \end{cases}$$

Digitized by Google

Da queste si traggono le relazioni:

$$(56)\qquad \begin{cases} x_{uu} + x_{vv} = 0\,, \\ y_{uu} + y_{vv} = 0\,, \\ z_{uu} + z_{vv} = 0\,, \\ t_{uu} + t_{vv} = 0\,. \end{cases}$$

Facilmente si verifica che

$$Sx_{uu}\,x_{uv} = 0\,,$$

il che significa che tali direzioni sono fra loro perpendicolari.

Indichiamo ora con $X_3, \ldots, T_3$; $X_4, \ldots, T_4$ i coseni direttori delle direzioni normali alla superficie individuate dalle derivate covarianti $x_{uu}, \ldots, t_{uu}$; $x_{uv}, \ldots, t_{uv}$.

Avremo:

$$(57)\qquad \begin{cases} x_{uu} = f_{11}\,X_3\,, \\ y_{uu} = f_{11}\,Y_3\,, \\ z_{uu} = f_{11}\,Z_3\,, \\ t_{uu} = f_{11}\,T_3\,. \end{cases} \qquad (58)\qquad \begin{cases} x_{uv} = g_{12}\,X_4\,, \\ y_{uv} = g_{12}\,Y_4\,, \\ z_{uv} = g_{13}\,Z_4\,, \\ t_{uv} = g_{12}\,T_4\,. \end{cases}$$

Perciò:

$$(59)\qquad g_{11} = f_{12} = g_{22} = 0\,.$$

E in forza delle (56),

$$(60)\qquad f_{22} = -f_{11}\,.$$

Resta a calcolare f_{11} e g_{12}.

Digitized by Google

Dalle (57), (58) si trae:

$$f^2_{11} = Sx^2_{uu}$$

$$g^2_{12} = Sx^2_{uv} .$$

Ponendo al posto delle derivate le loro espressioni (55) si ricava, dopo ovvî calcoli,

$$(61) \qquad f_{11} = g_{12} = \pm \sqrt{\frac{z_{uu}''^2 + z_{uv}''^2}{1 + \Delta}} .$$

Perciò, essendo $a_{11} = a_{22} = 1 + \Delta$, $a_{12} = 0$, a causa delle (59), (60), (61), si trova:

$$F_{11} = 0, \quad F_{12} = \pm f_{11}, \quad F_{22} = 0;$$

$$G_{11} = \mp g_{12}, \quad G_{12} = 0, \quad G_{22} = \pm g_{12}.$$

E perciò:

$$F_{11} F_{22} - F^2_{12} = G_{11} G_{22} - G^2_{12},$$

$$F_{11} G_{22} - 2F_{12} G_{12} + F_{22} G_{11} = 0,$$

c. d. d.

Per un'osservazione già fatta dal VITALI nella nota citata (pag. 60-61), le relazioni precedenti sussistono per ogni altra coppia ortogonale di normali.

4. Proprietà analitiche della coppia di normali. — Per le normali che abbiamo determinato al n° 2, si può istituire una ricerca analitica perfettamente simile a quella fatta dal VITALI nel citato lavoro (pag. 63-65). E appunto per questa stretta analogia, noi qui ci limitiamo ad affermare, senza dimostrare, certi risultati, tanto sono ovvie le modificazioni da farsi per passare dal procedimento del VITALI a quello che andremo ora svolgendo.

Consideriamo tre direzioni dello spazio 2-tangente in P alla superficie definite così:

$$\overline{x_{rs}} = F_{rs} X_4 - G_{rs} X_3, \ldots, \quad \overline{t_{rs}} = F_{rs} T_4 - G_{rs} T_3 .$$

Digitized by Google

Avendosi allora dalle (45), (46), (47), (48)

$$\xi - x = \frac{\overline{x_{11}}\,du^2 + 2\overline{x_{12}}\,du\,dv + \overline{x_{22}}\,dv^2}{\nu},$$

. . . . . .

$$\tau - t = \frac{\overline{t_{11}}\,du^2 + 2\overline{t_{12}}\,du\,dv + \overline{t_{22}}\,dv^2}{\nu},$$

ne concludiamo che la normale PQ alla superficie Σ, ha i coseni direttori proporzionali alle quantità

$$\overline{x_{11}}\,du^2 + 2\overline{x_{12}}\,du\,dv + \overline{x_{22}}\,dv^2, \ldots, \quad \overline{t_{11}}\,du^2 + 2\overline{t_{12}}\,du\,dv + \overline{t_{22}}\,dv^2.$$

Poichè il nostro spazio 2-tangente è a quattro dimensioni, e le tre direzioni testè definite sono situate sul piano normale ν in P, esse non saranno indipendenti, cosicchè, posto

$$\overline{A}_{rs,pq} = S\overline{x}_{rs}\,\overline{x}_{pq},$$

il determinante

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} \overline{A}_{11,11} & \overline{A}_{11,12} & \overline{A}_{11,22} \\ \overline{A}_{12,11} & \overline{A}_{12,12} & \overline{A}_{12,22} \\ \overline{A}_{22,11} & \overline{A}_{22,12} & \overline{A}_{22,22} \end{vmatrix}$$

sarà nullo.

Diciamo $\overline{A}^{rs,pq}$ il complemento algebrico dell'elemento $\overline{A}_{rs,pq}$ del determinante $\overline{A}$, e consideriamo il sistema di funzioni

$$\alpha^{hk,pq} = 2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}}\,\overline{A}^{hk,pq} : 4a^3, \tag{62}$$

dove ϵ_{hk}, ϵ_{pq} valgono zero o uno, secondo che gli indici h, k; p, q sono differenti od uguali. Il sistema (62) è un tensore quadruplo contravariante. Poniamo ancora

$$\overline{R}_{rs,pq} = \overline{A}_{rp,sq} - \overline{A}_{rq,sp}, \tag{63}$$

$$\overline{\rho}^{rs,pq} = \overline{\alpha}^{rp,sq} - \overline{\alpha}^{rq,sp}. \tag{64}$$

Digitized by Google

Sono questi rispettivamente due tensori quadrupli, il (63) covariante, e il (64) controvariante. Le funzioni

$$\bar{J}_2 = \bar{R}_{12,12} : a \,, \tag{65}$$

$$\bar{J}_4 = \bar{\rho}^{12,12} \,.\, a \tag{66}$$

sono due invarianti.

Consideriamo infine l'equazione di terzo grado in θ

$$\begin{vmatrix} \bar{A}_{11,11} & \bar{A}_{11,12} & \bar{A}_{11,22} - \theta \\ \bar{A}_{12,11} & \bar{A}_{12,12} + \frac{\theta}{2} & \bar{A}_{12,22} \\ \bar{A}_{22,11} - \theta & \bar{A}_{22,12} & \bar{A}_{22,22} \end{vmatrix} = 0 \,, \tag{67}$$

cioè

$$\rho^3 + 2\bar{J}_2 \rho + 4\bar{J}_4 = 0 \,,$$

avendo posto $\rho = \frac{\theta}{a}$.

Nel numero 2 la coppia di normali di coseni direttori $X_3, \ldots, T_3$; $X_4, \ldots, T_4$ è arbitraria. Assumiamo ora come tale coppia proprio quella che ci è offerta dalle bisettrici determinate nel numero suddetto. Allora si può provare che, fatta la posizione

$$(F, G) = F_{11} G_{22} - 2F_{12} G_{12} + F_{22} G_{11} \,,$$

e quindi anche

$$(F, F) = 2(F_{11} F_{22} - F^2_{12}),$$

$$(G, G) = 2(G_{11} G_{22} - G^2_{12}),$$

la espressione (F, G) ha valore nullo, mentre le espressioni (F, F), (G, G) sono radici della equazione (67). Possiamo pertanto enunciare il teorema seguente, che trova il suo analogo nel lavoro del VITALI [7]:

---

[7] Cfr. VITALI, loc. cit. [1], pag. 63.

Digitized by Google

TEOREMA. — *Se* Σ *è una superficie dello spazio lineare* S_4, *il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni, esiste in ogni suo punto una coppia ortogonale di normali a* Σ, *per la quale ha luogo la relazione*

$$(F, G) = 0 .$$

Digitized by Google

Ricerche sopra alcune reazioni di condensazione.

Nota di MICHELE GIUA
presentata dal Socio nazion. residente Felice Garelli.

In una Nota precedente, pubblicata negli *Atti* di questa Accademia (1), occupandomi della utilizzazione come carburante del fuselolo che si forma nella cosiddetta fermentazione acetono-butilica, eseguii diverse esperienze: 1°, per trasformare gli alcoli superiori contenuti nel fuselolo in eteri semplici e misti, che hanno il vantaggio di essere meno volatili dell'etere etilico e che si prestano per una maggiore compressione nei motori a scoppio; 2°, per trasformare questi alcoli superiori in idrocarburi olefinici. Fra i componenti del fuselolo, solamente l'alcool amilico può dare per disidratazione un prodotto liquido, mentre gli altri dànno idrocarburi gassosi, ciò che renderebbe il processo di scarsa importanza, se gli idrocarburi olefinici, a temperature elevate, non formassero prodotti di polimerizzazione, particolarmente sotto l'azione di catalizzatori adatti. Poichè le esperienze cennate, di carattere orientativo, furono condotte in un apparecchio assai semplice, funzionante alla pressione ordinaria — e non volendo per il momento variare le condizioni delle esperienze precedenti — ho continuato lo studio dell'argomento facendo avvenire una condensazione catalitica degli idrocarburi olefinici (in modo particolare del butilene) con l'aldeide acetica, prodotto oggi facilmente accessibile alla tecnica.

Per l'azione disidratante degli ossidi metallici, che si esercita su una miscela di alcool ed aldeide, si può eliminare l'ossigeno sotto forma di acqua e produzione di un idrocarburo non

(1) Vol. LXI, pag. 199 (1926).

Digitized by Google

saturo. Così, impiegando miscele di alcool butilico e amilico con l'aldeide acetica, le reazioni di disidratazione possono procedere nel modo seguente:

$$C_4H_9—OH + CH_3—CHO \rightarrow C_6H_{10} + 2H_2O.$$

$$C_5H_{11}—OH + CH_3—CHO \rightarrow C_7H_{12} + 2H_2O.$$

Queste, ed altre reazioni analoghe, possono trovare una conferma nel processo per la preparazione del " sintolo „ e derivati, introdotto nella tecnica da Fr. Fischer e fondato sulla condensazione catalitica sotto pressione del gas d'acqua (2).

In un'altra serie di esperienze ho tentato di condensare l'acetilene con l'acetone, in presenza di opportuni catalizzatori. Come è noto, sulla detta condensazione è fondato anche un metodo industriale per la preparazione dell'isoprene e quindi, per successiva polimerizzazione, del caucciù sintetico (3). I catalizzatori impiegati furono il sodio metallico, l'ossido di mercurio e di calcio, la calce sodata; i risultati ottenuti dimostrano che il sodio è il più attivo; esso agisce come condensante verso lo stesso acetone, trasformandolo in una serie numerosa di derivati, come l'alcool diacetonico, l'ossido di mesitile, il forone, lo xilitone, ecc. (4).

I liquidi ottenuti nelle condizioni sperimentali descritte più

---

(2) Fr. Fischer e Hans Tropsch, " Brennstoff Chemie „, *4*, 276 (1923); *5*, 201 (1924); " Ber. „, *56*, 2428 (1923); " Gesammelte Abhandlungen zur Kenntnis der Kohle „, vol. VII, pag. 49 e *passim* (1925). — Cfr. anche Naphtali, *Leichte Kohlenwasserstofföle*, pag. 348 (1928).

(3) Cfr. Karrer, *Lehrbuch der org. Chemie*, pag. 63 (1928).

(4) Sulla condensazione dell'acetone in mezzo alcalino cfr.: Fittig, " Ann. Chem. „, *110*, 23 (1859); Beilstein e Rieth, Ivi, *126*, 245 (1863); Claisen, Ivi, *180*, 4 (1876); Pawlow, Ivi, *188*, 128 (1877); Bredt e Rübel, Ivi, *299*, 165 (1898); Kerp e Müller, Ivi, *299*, 114, 211 (1898); Louise, " Bull. Soc. Chim. „ (2), *39*, 522 (1906); Oendorff e Young, " Am. chem. J. „, *15*, 249 (1893); Thitherley, " J. chem. Soc. „, *81*, 1526 (1902); Pinner, " Ber. „, *15*, 589 (1882); Freund e Speyer, Ivi, *35*, 2321 (1902); Knövenagel, Ivi, *39*, 3460 (1906); Reich e Serpek, " Helv. chim. Acta „, *3*, 138 (1920); Porlezza, " Gazz. chim. ital. „, *54*, 491 (1924).

Digitized by Google

oltre sono miscele complesse a causa della formazione dei prodotti di condensazione dello stesso acetone; in ogni caso, mai la parte trasformata dell'acetone messo a reagire ha superato il 65 %. Come già si avvertì nella nota precedente, anche nelle esperienze descritte in questa non si è preso di mira lo studio completo analitico dei diversi prodotti della reazione.

Parte sperimentale

(In collaborazione coi Dottori L. Thumiger ed E. Brunelli).

Pirogenazione di miscele di alcoli e aldeide acetica. — Fu impiegato lo stesso apparecchio descritto nella nota precedente. L'aldeide acetica venne fatta gocciolare da un imbuto a rubinetto nel pallone di distillazione, in modo da essere trascinata dai vapori di alcool, attraverso il tubo, sulla massa catalitica, costituita da 80 % di Al_2O_3 e 20 % di Cr_2O_3. La temperatura del tubo di catalisi fu mantenuta fra 400-450°. L'esperienza venne condotta nel modo seguente: sopra una miscela di alcool isobutilico e di alcool amilico di fermentazione, formata da gr. 18 del primo e gr. 22 del secondo, portata all'ebollizione, si lasciano gocciolare gr. 22 di aldeide acetica. Dagli apparecchi di condensazione sfuggono copiosi vapori che reagiscono rapidamente col bromo; il condensato liquido che si raccoglie è diviso in due strati: quello superiore distilla fra 80-90° e pesa gr. 25; quello inferiore pesa gr. 14 e distilla fra 95-107°. Esso è costituito da acqua e piccole quantità di alcoli inalterati. Lo strato superiore è costituito da idrocarburi, in prevalenza non saturi; reagisce energicamente col bromo, mentre non reagisce che debolmente col sodio metallico. La presenza del doppio legame fu anche confermata con la reazione di Balbiano dell'acetato mercurico (5).

Il distillato fra 80-90° dà infatti con la soluzione acquosa satura di acetato mercurico un precipitato bianco.

(5) Balbiano, "Chem. Zeit.", 1901, pag. 932; "Ber." *36*, 3575 (1905); "Gazz. chim. ital.", *36*, 277 (1906); "Rend. Acc. Lincei". *18*, I, 372 (1909); *24*, I, 165 (1915).

Digitized by Google

Acetilene e acetone. — Nelle esperienze, su 500-600 gr. di acetone, in presenza del catalizzatore, furono fatti gorgogliare circa 50 l. di acetilene, purificato previamente sia con soluzione alcalina di permanganato, che con soluzione acida.

1ª Esperienza. — 500 gr. di acetone furono trattati a freddo e agitando con gr. 23 di sodio metallico; cessato lo sviluppo d'idrogeno fu immessa una corrente regolare di acetilene, dapprima a freddo, indi riscaldando a b. m. per circa 4-5 ore. Dopo saturazione con anidride carbonica il liquido filtrato fu distillato frazionatamente.

Fra 55-65° distillarono gr. 230; fra 65-150° gr. 220; fra 150-200° gr. 31 e fra 200-250° gr. 49.

2ª Esperienza. — La stessa quantità di acetone fu assoggettata all'azione dell'acetilene in presenza di un miscuglio costituito da gr. 50 di ossido mercurico e gr. 50 di calce viva. In questa esperienza si ebbe una perdita di acetone a causa di un non perfetto funzionamento degli apparecchi di condensazione. Il liquido filtrato, colorato in giallo, sottoposto alla distillazione frazionata, dette:

Fra 55-60° gr. 300; fra 60-70° gr. 130; fra 70-120° gr. 25.

3ª Esperienza. — L'acetone (gr. 600), in presenza di gr. 100 di calce sodata e gr. 20 di ossido di mercurio, fu sottoposto all'azione di una lenta corrente di acetilene per circa 12 ore, riscaldando debolmente a b. m. Per distillazione del liquido filtrato, colorato in rosso-bruno, si ottennero le seguenti frazioni:

Fra 55-65° gr. 439; fra 65-75° gr. 121; fra 75-100° gr. 16; fra 100-120° gr. 38.

La frazione che bolle fra 65-150° della esperienza 1ª sottoposta ad un ulteriore processo di distillazione frazionata, dette un liquido di odore penetrante, con punto di ebollizione compreso fra 102-104°, che sottoponemmo all'analisi elementare.

Digitized by Google

Gr. 0,2503 di sostanza dettero gr. 0,6567 di CO_2 e gr. 0,2172 di H_2O.

Calcolato per C_5H_8O	Trovato
C % : 71,37	71,56
H „ : 9,59	9,64.

Questi dati analitici concordano per il 3-metilbutinolo che prende origine nella reazione fra l'acetilene e il sodio-acetone (6) oppure fra l'acetiluro di sodio e l'acetone (7).

Le frazioni che bollono a temperature superiori ai 150° reagiscono con l'idrossilamina, la fenilidrazina e la semicarbazide, indizio ch'esse contengono prodotti della condensazione alcalina dell'acetone. Inoltre, queste frazioni gelatinizzano facilmente il pirocollodio (contenente il 12,1 % di N), caratteristica anche questa di vari chetoni derivati dall'acetone.

Queste ricerche verranno continuate.

Torino, Laboratorio di Chimica organica
della R. Scuola di Ingegneria.

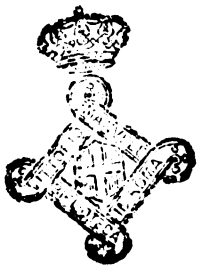
---

(6) Cfr. i brevetti Merck e Bayer in " Chem. Centr. „, 1914, II, 1370 1916, I, 815; II, 288.

(7) Hess e Munderloh, " Ber. „, *51*, 377 (1918).

L'Accademico Segretario
Emilio Repossi.

Digitized by Google



Digitized by Google

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

Opere scelte di Amedeo Avogadro (per cura di **I. Guareschi**).

Torino, Unione tipografico-editrice torinese, 1911, 1 vol. in-4° (4 csn., CXL-492 pp., 1 ritr.).

Miscellanea di studi danteschi. ***Dante e il Piemonte.***

Torino, Fratelli Bocca editori, 1922, in-8° (VIII-648 pp.).

Digitized by Google

SOMMARIO

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 25 Novembre 1928 *Pag.* 43

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 2 Dicembre 1928 . *Pag.* 46

Boccalatte (Cesarina). — La Geometria basata sulle idee di punto e angolo retto . . . . . „ 47

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 16 Dicembre 1928 . „ 56

Colombo (Bonaparte). — Sulla propagazione delle onde sismiche in uno strato piano illimitato . . . . . „ 58

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 30 Dicembre 1928 . „ 66

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 13 Gennaio 1929 . „ 68

Tonolo (Angelo). — Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dello spazio S_4 . . . . . „ 69

Giua (Michele). — Ricerche sopra alcune reazioni di condensazione „ 89

Tip. Vincenzo Bona - Torino

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

BIBLIOTECA NAZIONALE V.E. ROMA
* RIVISTE *

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIV, DISP. 7ª E 8ª, 1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Gennaio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Grassi, Panetti, Sacco, Pochettino, Garelli e Boggio, in funzione di Segretario.

Scusano l'assenza i Soci: Mattirolo, Somigliana e Repossi.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente presenta in omaggio all'Accademia le opere:

Emanuele Paternò: *Conferenze e discorsi scientifici*;

Aderito Belli: *Lazzaro Spallanzani*;

Ente autonomo per l'Acquedotto Pugliese: *Seconda relazione 1928,*

illustrandole con brevi parole, e ricordando che Lazzaro Spallanzani fu nominato Socio straniero della nostra Accademia il 25 luglio 1783.

Il Presidente presenta, a nome del Socio Somigliana, per l'inserzione negli *Atti*, una Nota dei Prof.ri A. Amerio, C. De Pasquale e V. Ricca, sulle *Misure pireliometriche eseguite sull'Aspromonte* (*).

(*) La Nota Amerio, De Pasquale, Ricca: *Misure pireliometriche eseguite sull'Aspromonte*, essendo ritardata, uscirà nella prossima dispensa.

Digitized by Google

Il Socio Pochettino presenta poi una Nota della Dottoressa G. Aliverti, sulle *Misure di radioattività atmosferica,* e la commenta brevemente.

Il Presidente presenta una Relazione del Socio Mattirolo circa la stampa dell'ultima parte della *Flora sarda* del Plazza (A. Terracciano) nel volume delle *Memorie* dell'Accademia; ma stante l'assenza del Socio Mattirolo, si delibera di rimandare la discussione ad una prossima seduta.

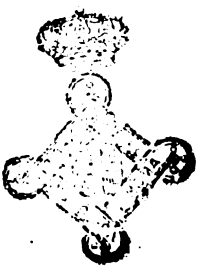
Digitized by Google

LETTURE

Misure di radioattività atmosferica.

Nota di G. ALIVERTI
presentata dal Socio nazionale residente A. Pochettino.

Fra le diverse questioni che interessano attualmente la Geofisica e la Meteorologia, non occupa l'ultimo posto quella della radioattività atmosferica; essa si connette sopratutto al problema, non ancora completamente risoluto, dell'origine dell'elettricità atmosferica, e interessa dal punto di vista meteorologico come uno degli elementi definienti le proprietà, lo stato e le perturbazioni dell'atmosfera. È ovvio che anche per questo problema sarebbe utile e desiderabile una vasta organizzazione e coordinazione delle misure, intesa a raccogliere numerosissimi dati sperimentali tutti confrontabili fra loro. Per ora tuttavia ci si deve accontentare di una serie di dati staccati, dovuti alla iniziativa individuale; essendomisi presentata la possibilità di fare misure al Col d'Olen, ho creduto quindi non privo di qualche interesse un confronto fra la radioattività atmosferica a Torino e quella di lassù. Nella presente Nota riferisco appunto sui dati ottenuti.



Al Col d'Olen (m. 2900 s. m.) ho eseguite misure nel mese di agosto dello scorso anno. Mi servii del metodo di attivazione dei fili; esso è quello che meglio si presta per esperienze di alta montagna, e che inoltre permette di raccogliere ed individuare i depositi attivi provenienti dalle tre diverse emanazioni che possono essere presenti nell'atmosfera. Usai un apparecchio di dimensioni circa uguali a quello di Elster e Geitel [1]. Esponevo il filo di rame, lungo 15 metri e del diametro di mm. 0,5,

[1] Elster u. Geitel, "Phys. ZS.„, *3*, 1902-1903.

Digitized by Google

in vicinanza dell'Istituto Mosso all'altezza di circa 3 m. dal suolo; lo tenevo esposto per 2 ore, carico a potenziale negativo circa costante, mai inferiore a 2500 Volta, usando una macchina elettrostatica a caduta d'acqua.

Anche recentemente sono state fatte misure con esposizioni molto lunghe (2); ma l'attivazione di 2 ore presenta, secondo me, notevoli vantaggi ed è da preferire. Le lunghe attivazioni (parecchie decine di ore) possono sovente, e senza controllo, non rispondere bene allo scopo per il quale si usano, cioè per la determinazione del rapporto fra il numero di atomi di Torio A e il numero di atomi di Radio A (sono questi i due elementi sempre presenti nell'atmosfera) esistenti nel medesimo volume di aria. In realtà capita sovente di osservare valori molto differenti dell'attività totale e della percentuale di Torio, sperimentando in giornate consecutive apparentemente normali e, talvolta, lo stesso accade per misure eseguite nella medesima giornata. Dunque per questo fatto e insieme perchè il deposito di Radio si distrugge nell'intervallo di 4 ore mentre quello di Torio dura molto più a lungo, rimarrà sul filo una quantità di deposito di Torio rispecchiante una media delle condizioni verificatesi durante la lunga esposizione, e per il deposito di Radio una quantità corrispondente alle condizioni delle sole ultime 4 ore. Allo scopo di determinare il rapporto suddetto, meglio sarebbe fare attivazioni brevi e poi, analizzata la curva sperimentale di disattivazione, risalire ai valori delle singole attività per lunghe esposizioni, mediante tavole.

Finita dunque l'attivazione, di due ore, portavo il filo avvolto sopra un telaio metallico, nella camera di ionizzazione. Osservavo la velocità di scarica della foglia dell'elettroscopio a intervalli di 15′ e per non meno di tre ore. La conoscenza dell'ordinata iniziale e di quella al tempo 180′ è in realtà sufficiente a determinare separatamente le attività dei componenti il deposito. Infatti se indichiamo con R_0 l'attività iniziale dovuta a depositi di Radio + Attinio, e con T_0 quella dovuta al

(2) Sam. Y. Khambata, " Indian Journal of Physics „, sett. 1927.

Digitized by Google

deposito di Torio, possiamo scrivere rispettivamente per i tempi 0′ e 180′:

$$(1)\quad \begin{cases} R_0 + T_0 = a_0 \\ 0{,}02\, R_0 + 1{,}785\, T_0 = a_t \end{cases}$$

dove a_0 e a_t rappresentano le ordinate della curva sperimentale tempo-attività. Si possono raggruppare in un solo termine, senza errore sensibile, le attività dei depositi di Radio e di Attinio perchè esse al tempo 180′ sono entrambe ridotte a circa il 2 % del valore iniziale. Il deposito di Torio, al tempo 180′, raggiunge invece il massimo di attività. Il coefficiente 0,02 posto nelle (1) si riferisce al Radio; la piccola differenza che esiste fra questo e l'analogo coefficiente per l'Attinio porterebbe, nella ipotesi più sfavorevole, a un errore del 4-5 % nella determinazione del Torio, e, praticamente, a nessun errore nella ulteriore separazione del Radio dall'Attinio. L'errore sul Torio ha poca importanza, data la grande variabilità che si nota nell'attività di questo tipo. Conosciuto dalle (1) il valore di T_0, si calcola facilmente tutta la curva del deposito di Torio. Detratta questa dalla curva sperimentale, se ne ottiene un'altra che a sua volta è poi facile analizzare ulteriormente nel caso in cui siano presenti entrambi i depositi di Radio o di Attinio.

Per la separazione della parte di Torio e per la interpretazione della curva rimanente ho assunto però sempre come tempo zero quello corrispondente ai 15′ dall'inizio della disattivazione; sopratutto per non eseguire delle extrapolazioni arbitrarie, ma anche per non servirmi delle primissime determinazioni dell'attività, che potevano essere affette da grosso errore (quando per es. l'elettroscopio veniva accidentalmente scaricato nel mettere in posto il telaio col filo). I coefficienti numerici delle (1) risultano allora modificati, ma valgono sempre le considerazioni fatte sopra. Ho ricavato il valore iniziale (per $t = 0$) dell'attività di ciascuno dei depositi presenti facendo uso delle tavole, dopo aver decomposta ciascuna curva sperimentale nelle sue componenti. Le curve ottenute nelle esperienze fatte al Col d'Olen, detratta la percentuale di Torio presente,

Digitized by Google

ricopiano (v. figure) la curva del deposito di Radio data dalle tavole ([3]).

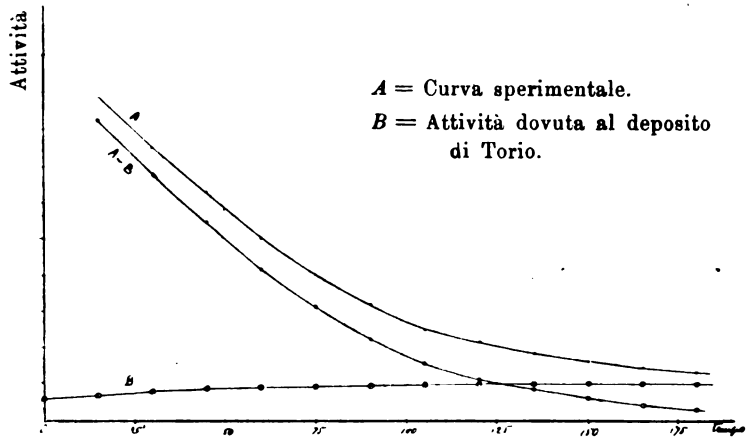


Fig. 1. — Col d'Olen (7–8–1928).

Risultano dunque presenti in quell'atmosfera soltanto emanazioni di Radio e di Torio; l'attività di tipo Torio appare piccola

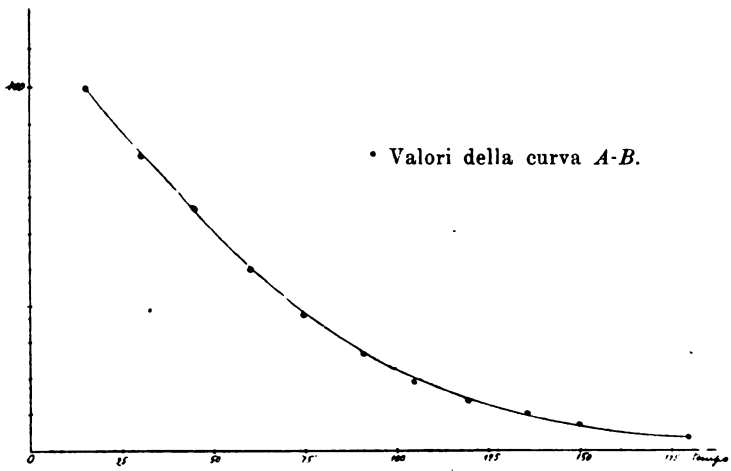


Fig. 2. — Confronto della curva *A-B* con quella data dalle tavole per il deposito di radio.

([3]) Meyer und Schweidler, *Radioaktivität*, 1927.

Digitized by Google

rispetto a quella di tipo Radio; al massimo ne è il 7 % (il 13 agosto, attivazione del pomeriggio).

La media dei numeri di attivazione (4), ottenuti in nove giornate normali (cielo sereno e atmosfera relativamente calma), vale 250; i singoli valori si scostano abbastanza poco dalla media (v. tabella).

	Data								
	4-VIII	6-VIII	7-VIII	8-VIII	9-VIII	10-VIII	11-VIII	12-VIII	14-VIII
A (totale)	223	193	183	333	265	290	224	288	253
A_R (radio)	220	186	176	330	255	282	219	283	246
A_T (torio)	3	7	7	3	10	8	5	5	7
A_T/A_R	0,015	0,035	0,039	0,01	0,04	0,03	0,015	0,015	0,028

Valori particolarmente bassi osservai invece in due misure eseguite nella giornata del 13 agosto; nella mattinata, a cielo coperto (esposizione dalle $6^h\,30'$ alle $8^h\,30'$) risultò $A = 150$ e nel pomeriggio esposizione dalle $11^h\,30'$ alle $13^h\,30'$) $A = 60$. Durante l'attivazione del pomeriggio, vento a raffiche sospingeva la nebbia dalla Valsesia verso il Colle. Il valore massimo 333 è di una giornata calda, senza vento, a cielo sereno e perfettamente trasparente.

Dal Direttore degli Osservatori Meteorologici e Geofisici del Monte Rosa mi vennero gentilmente forniti i dati meteorologici del mese di agosto riguardanti il Col d'Olen. Il confronto dell'andamento dell'attività raccolta in quel periodo con l'andamento dei diversi fattori meteorologici non rivela alcuna dipendenza particolare. La nota relazione con la pressione non appare molto evidente; se si eccettuano le due misure del 6 e 7 agosto che indicano una diminuzione di attività in corrispondenza all'andamento crescente della pressione. Il fatto si può attribuire alla relativamente piccola ampiezza delle variazioni verificatesi nella pres-

(4) Diminuzione di potenziale, in Volta per un'ora, dovuta a un metro di filo.

Digitized by Google

sione in quel periodo. Una specie di parallelismo c'è con l'umidità relativa. Riporto nella seguente tabella i valori di A delle giornate normali e i corrispondenti valori dell'umidità relativa.

A (totale)	223	193	183	333	265	290	224	288	253
U. R.	74	51	20	52	44	63	56	75	75

Una corrispondenza in questo senso era stata osservata da Satterly (5) in misure quantitative da lui eseguite a Cambridge; ma Jaufmann alla Zugspitze (6) ne ha notata una di senso contrario. Nel mio caso i due andamenti non sono così concordanti da permettere di asserire una sicura relazione.

A scopo di confronto eseguii, come dissi, misure anche a Torino (240 m. s. m.), alcune prima, altre dopo quelle del Col d'Olen. Tendevo il filo tra due finestre del primo piano, attraverso il cortile dell'Istituto di Fisica volto a ponente, ad un'altezza sul suolo maggiore quindi di alcuni metri di quella del Col d'Olen. Approfittai solo di giornate normali, cioè a cielo sereno ed atmosfera calma. L'attività del deposito raccolto è molto minore in generale di quella misurata al Col d'Olen. Tre misure fatte nell'ultima quindicina di luglio dànno come media A = 60. Dieci misure eseguite, sempre in giornate normali, nell'ultima quindicina di ottobre e in novembre dànno il valore medio 62, con un massimo, 120, del 25 ottobre e un minimo, 19, del 17 novembre. Il rapporto tra attività-Torio e attività-Radio risultò in un solo caso 0,02; nelle altre misure è trascurabile, poichè corrisponde a soli 2 o 3 millesimi.

I valori trovati in montagna, per il fatto che lassù la pressione è ridotta rispetto a Torino di circa $^1/_4$, sono da ritenere tutti leggermente inferiori al vero, perchè col diminuire della pressione il percorso delle particelle α aumenta e quindi, per dimensioni della camera di ionizzazione che non consentano l'esaurimento del percorso stesso, diminuisce la ionizzazione

(5) " Phil. Mag. „ 1910 (2).

(6) Veröffentl. Bayer. Centralst. München 1909, C. 30.

Digitized by Google

prodotta. In media dunque l'attività totale raccolta a Torino è un po' meno della quarta parte di quella raccolta al Col d'Olen.

Mentre fra i risultati da me ottenuti a Torino e al Col d'Olen si può stabilire un confronto quantitativo perchè le condizioni di esperienza furono nei due casi all'incirca uguali, per quel che riguarda sia lo stato meteorologico dell'atmosfera, sia l'apparecchio usato, che fu sempre lo stesso; altrettanto non si può fare, con sicurezza, per i risultati degli altri sperimentatori. Questo del resto accade per tutte le misure della Geofisica e della Meteorologia, ma in particolare per queste che dipendono in modo notevole dallo strumento di misura.

Nell'andamento però i risultati su riportati concordano con quelli ottenuti dagli altri.

Istituto Fisico della R. Università,
Torino, 23 gennaio 1929, anno VII.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Febbraio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, GRASSI, SACCO, POCHETTINO, BOGGIO e il Segretario REPOSSI.

Scusa l'assenza il Socio D'OVIDIO.

Il verbale della adunanza antecedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio SACCO presenta in omaggio all'Accademia un suo opuscolo: *I massi erratici.*

Il Socio REPOSSI presenta in seguito per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Dott. Giuseppe RESEGOTTI, dal titolo: *Heulandite e stilbite di Prascorsano presso Cuorgnè*, ed una Nota della Dott.ssa Virginia GENNARO, dal titolo: *Thomsonite e scolecite dell'alta Valle d'Ayas e delle Valli di Lanzo*; e ne illustra brevemente il contenuto.

Il Presidente PARONA presenta poi una sua Nota dal titolo: *Appunti per uno studio sulle "Spugne" del Permiano di Sicilia,* facendo rilevare all'Accademia l'importanza che la paleontologia di tale periodo ha per la geologia siciliana.

Da ultimo il Socio MATTIROLO, al quale fu affidato in esame il manoscritto della III parte della *Flora Sarda* del TERRACCIANO, riferisce sull'importanza che tale opera, di cui l'Accademia pubblicò già le prime due parti, possiede, e conclude la sua Relazione con la proposta ch'essa venga pure pubblicata nelle nostre *Memorie.*

Il Presidente ringrazia vivamente il Socio MATTIROLO ed assicura che la proposta di pubblicazione verrà presa in esame quando si conosceranno esattamente le condizioni per la stampa delle *Memorie.*

Digitized by Google

LETTURE

Heulandite e Stilbite di Prascorsano presso Cuorgnè (Piemonte).

Nota del Dott. GIUSEPPE RESEGOTTI
presentata dal Socio nazionale residente E. Repossi.

Percorrendo la strada che da Belmonte scende a Prascorsano e prosegue poscia per Forno Rivara, dopo aver attraversato i graniti della " zona del Canavese „ si incontrano le formazioni dell'estesa serie dei gneiss Sesia-Val di Lanzo (1).

Il limite delle due zone qui a contatto, è in parte occultato dai terreni coltivi che occupano il fondo della valletta tra Pemonte e Prascorsano; gli sparsi lembi affioranti rivelano tuttavia in modo chiarissimo una zona di intensa laminazione, fortemente provata dall'azione degli agenti fisici, sì che le rocce, profondamente alterate, si lasciano agevolmente tagliare con un coltello.

Analogamente si presentano per breve tratto le rocce affioranti ai lati della carrozzabile per Pratiglione; a queste fanno seguito forme gradatamente più sane e più evidenti di gneiss appartenenti al gruppo dei gneiss minuti e micascisti.

È nota la grande varietà di tipi litologici che, pur formando un distinto membro tectonico, comprende il gruppo dei gneiss minuti e micascisti nella serie dei gneiss Sesia-Val di Lanzo, varietà di cui è dato rendersi conto facilmente già al semplice esame macroscopico delle rocce che accompagnano la carrozzabile suddetta, e meglio ancora con lo studio degli ottimi campioni che si possono raccogliere in alcune cave aperte nella formazione in parola.

Poco oltre i casolari di I Buf (2) è aperta una di tali cave,

(1) *Carta Geologica d'Italia*, foglio *Ivrea*. 1 : 100.000. Roma, 1912.
(2) *Carta d'Italia*, 1 : 50.000, foglio *Cuorgnè*. Istituto Geografico Militare.

Digitized by Google

da cui si estrae pietrisco per inghiaiamento stradale. Quando la visitai per la prima volta ebbi la ventura di trovarla in piena attività: il che mi permise di raccogliere alquanto materiale da studio. In seguito purtroppo la cava venne abbandonata e mi fu quindi troncata la possibilità di aumentare ancora la raccolta oltremodo promettente, di bei campioni mineralogici di questa interessante località piemontese.

Lo scavo abbastanza profondo ha messo qui allo scoperto rocce sanissime di cui è molto evidente l'andamento della scistosità, diretta sensibilmente da Nord a Sud con inclinazione di circa 60° ad Est.

La massa è attraversata da numerosi filoni e filoncelli di quarzo, frequentemente cariato e colorito in giallo da ossidi di ferro e sovente accompagnato dai minerali che formano oggetto della presente Nota.

La tessitura della roccia è fortemente scistosa.

In sezione sottile si osserva, in vari tipi, struttura ora quasi granulare ed ora pseudoporfirica per la comparsa di grossi noduli feldspatici sparsi qua e là, tanto da ricordare nettamente certi ortogneiss derivati per laminazione di rocce porfiriche.

Nel tipo più comune, che parmi corrispondere ai gneiss minuti leptinitici dello Stella (1), la massa è costituita da un aggregato di quarzo, albite ed ortoclasio con pochissimo microclino, disposti in straterelli alternanti con altri analoghi, ma cui si aggiunge piuttosto abbondante la muscovite. Sparso abbondantemente è il granato, associato, particolarmente negli strati micacei, a numerosi sciami di individui di epidoto; l'uno e l'altro sono visibili solo al microscopio. Sporadico qualche cubetto di pirite.

Le azioni dinamometamorfiche subìte dalla roccia sono accusate dalle estinzioni ondulate del quarzo.

Nella massa rocciosa si osservano delle concentrazioni albitiche in cui sono aperte geodine tappezzate di cristallini imperfettamente sviluppati dello stesso minerale.

---

(1) Stella A., *Relazione sul rilevamento geologico eseguito nell'anno 1893 nelle Alpi Occidentali*, " Boll. R. Comit. Geol. „, Roma, 1894, n. 4, pag. 3.

Digitized by Google

L'esame di una sezione tagliata attraverso una di tali plaghe mostra che la struttura normale della roccia va diventando man mano più granulare avvicinandosi alle concentrazioni in parola; contemporaneamente si produce un aumento considerevolissimo nel granato, che compare associato, oltre che all'epidoto, anche ad abbondanti granuli tipici di zoisite. In queste plaghe sono anche più abbondanti i solfuri, pirite e galena.

La roccia dell'altra cava, più oltre verso Pratiglione, è invece un gneiss riccamente muscovitico a glaucofane.

Nella cava di I Buf ho potuto raccogliere campioni discretamente belli ed alcuni certamente pregevoli di due zeoliti: la *heulandite* e la *stilbite*, accompagnate talora da cristallini di altri minerali di interesse e bellezza assai inferiori.

Poichè non mi risulta che sia già nota tale località per le zeoliti suddette, reputo opportuno riferirne brevemente, accennando pure agli altri minerali che si rinvengono cristallizzati nelle geodi e nelle litoclasi ed a quelli che si rinvengono solo in roccia ma che assumono importanza per concentrazioni non normali per la roccia stessa.

Galena. — Trovasi in cubetti ed in masserelle cristalline irregolari, frequente però soltanto in vicinanza delle geodine più volte citate.

Pirite. — Componente accessorio costante della roccia in cubetti microscopici, nei pressi delle concentrazioni feldspatiche trovasi più abbondante ed in cubi più grossi.

Quarzo. — Nelle litoclasi trovasi qua e là qualche cristallo di questa specie con la consueta combinazione del prisma coi due romboedri.

Albite. — Forma delle concentrazioni in cui sono aperte delle geodine, nel cui lume sporgono cristallini del minerale stesso per lo più estremamente piccoli e non geminati. Al fianco sinistro della cava in una roccia profondamente alterata, nella quale si identificano filoni quarzosi e nuclei feldspatici, si trovano cristalli assai migliori, lunghi fino a 5 mm. a facce abbastanza brillanti, ora semplici ed ora geminati secondo la legge

Digitized by Google

dell'albite. Alcune misure eseguite su cristallini abbastanza belli condussero alla determinazione delle forme:

$$\}010\{\ \}001\{\ \}110\{\ \}1\bar{1}0\{\ \{1\bar{3}0\{\ \}\bar{1}01\}\ \}\bar{4}03\{\ \}\bar{1}\bar{1}1\{$$

e forse $\}\bar{2}01\{$.

Granato. — Abbondantissimo attorno ai nuclei feldspatici; sempre anomalo.

Zoisite. — Abbondante assieme al granato come sopra.

Epidoto. — Cristallini schiacciati tappezzano alcune litoclasi.

Heulandite. — I tipi di giacitura per questo minerale sono tre, cui corrispondono anche differenti aspetti nei cristalli.

Cristalli di questo minerale si trovano anzitutto schiacciati nelle piccole litoclasi della roccia. Date le condizioni di spazio ristretto in cui si sono formati, sono ridotti a semplici lamelle a contorno poligonale, torbide e gialle per ossidi di ferro.

Un secondo tipo di giacitura si ha nelle cavernosità dei filoni e delle concentrazioni quarzose. Ma anche qui i cristalli non sono eccessivamente brillanti ed hanno anzi le facce torbide e lattiginose, che non permettono quindi di fare misure goniometriche di qualche precisione. A parte questo difetto di limpidezza, i campioni provenienti da questo tipo di giacitura sono veramente pregevoli per la ricchezza di ben formati cristalli che, ora isolati ed adagiati su $\}010\{$ ed ora ed assai più frequentementi intrecciati caoticamente, rivestono densamente la roccia che li porta.

Provengono da questa giacitura i cristalli più grossi, lunghi secondo z fino a 6 : 8 mm., larghi secondo x 2 : 3 mm. e con uno sviluppo secondo y di 4 : 6 mm. ed anche più in qualche individuo eccezionale.

Il terzo tipo di giacitura è dato dalle geodine feldspatiche, nelle quali pochi ma limpidissimi e perfetti cristalli sporgono nella cavità mescolati ai cristallini di albite. Non si hanno qui campioni paragonabili a quelli del tipo precedente per ricchezza e grossezza di individui; in compenso la maggior perfezione dei

Digitized by Google

singoli cristallini permette di farne oggetto di determinazioni cristallografiche con risultato soddisfacente.

Per le osservazioni goniometriche vennero utilizzati alcuni di questi cristallini, che, pur essendo i migliori, diedero misure i cui valori estremi sono abbastanza lontani, e le medie alquanto divergenti dai valori calcolati; ciò che non deve far specie, tenendo conto delle forti oscillazioni nei valori angolari che sono proprie di questo minerale.

Le forme rinvenute sono le seguenti:

$$\{010\} \quad \{110\} \quad \{001\} \quad \{201\} \quad \{\bar{2}01\}$$

associate in due sole combinazioni diverse, l'una costituita da tutte e cinque le forme trovate, l'altra differente unicamente per la mancanza della $\{110\}$; l'*habitus* è però lo stesso per entrambe e corrisponde a quello noto e comune per l'Heulandite della maggior parte dei giacimenti (Fig. 1).

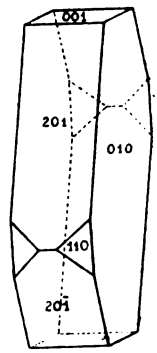


Fig. 1.

Dal maggiore o minore sviluppo secondo l'asse *y* si hanno forme quasi tabulari secondo $\{010\}$ oppure prismatiche secondo detto asse. Le massime dimensioni nelle stesse direzioni di cui nel tipo precedentemente descritto sono rispettivamente 6, 2 e 4 mm.

Le facce di $\{010\}$ sono sempre le più estese; seguono quelle di $\{201\}$, di $\{\bar{2}01\}$ ed infine di $\{001\}$. Le facce di $\{110\}$ raramente sono tutte presenti ed in genere hanno uno sviluppo assai variabile. L'Heulandite di Prascorsano apparterrebbe quindi al primo dei tipi fondamentali stabiliti dal Königsberger per le Heulanditi dei giacimenti alpini (1).

Il colore di questi cristallini non è latteo o giallo ruggine opaco come nelle altre giaciture; essi sono invece od incolori o leggerissimamente sfumati di giallo verdognolo e trasparentis-

(1) Königsberger J., *Ueber alpine Minerallagerstätten*. Citato in "Zeit. f. Kryst.", 1923, Band LVII, pag. 679.

Digitized by Google

simi. Le facce di }010{ hanno la caratteristica lucentezza madreperlacea, vivissima specialmente sulle facce di sfaldatura, che è facilissima e perfetta.

Per le misure goniometriche servono ottimamente bene le facce di }010{ perfettamente piane; della zona [010], le cui facce sono tutte alquanto striate parallelamente all'asse di zona, sono migliori le facce di }001{, cui seguono le }$\bar{2}$01{ ed infine le }201{ sempre un po' ondulate. Le }110{ sono limpide ma frequentemente curve.

Segue la tabella delle misure eseguite e dei valori calcolati con le costanti del Des Cloizeaux:

$$0{,}40347 : 1 : 0{,}42929 \qquad \beta = 88^\circ\,34'\,30''.$$

Spigoli misurati	Numero delle misure	Limiti delle osservazioni	Medie	Angoli calcolati
(001)—(201)	8	63° 41′ — 64° 32′	63° 58′	63° 40′
(001)—($\bar{2}$01)	7	65° 42′ — 66° 52′	66° 17′	66°
(201)—($\bar{2}$01)	8	49° 5′ — 50° 30′	49° 55′	50° 20′
(110)—(010)	15	67° 4′ — 67° 57′	67° 35′	68° 2′
(110)—(20$\bar{1}$)	5	32° 57′ — 34° 10′	33° 34′	33° 7′
(110)—(201)	8	31° 57′ — 32° 47′	32° 35′	32° 44′

P. sp. 2,27 (a 16°) (1).

La possibilità di disporre di numerose e belle lamine di sfaldatura }010{ mi permise di eseguire in modo abbastanza completo l'esame delle proprietà ottiche.

L'Heulandite è notoriamente un minerale assai interessante per le curiose e varie anomalie ottiche che presenta; dopo il

(1) I pesi specifici furono determinati colla soluzione di Thoulet e la Bilancia di Westphal.

Digitized by Google

Des Cloizeaux, il Mallard ed il Rinne (1) che le fecero rilevare, numerosi studiosi se ne sono occupati sperimentando cristalli di ogni località, e si può dire, che per quasi tutti i giacimenti, si trovarono per le singole proprietà ottiche valori differenti e variabili talora anche considerevolmente.

Per rendermi conto comparativamente dell'entità delle anomalie ottiche dell'Heulandite di Prascorsano, ho esaminato tutti i lavori includenti osservazioni sulle proprietà ottiche dello stesso minerale delle più note e classiche località.

Per quanto ho potuto constatare, parmi che, se qualitativamente per le suddette anomalie l'Heulandite in parola non differisce sostanzialmente dalle altre finora studiate, si caratterizza invece per la varietà e l'accentuarsi di esse e per l'estrema ed irregolare loro variabilità. L'esame della distribuzione dei valori delle singole proprietà nei vari punti di uno stesso cristallo, lascia la netta impressione di un disturbo ottico veramente eccezionale.

Le determinazioni ottiche vennero tutte eseguite su lamine di sfaldatura immerse in balsamo sciolto a freddo in xilolo.

Degli indici di rifrazione potei determinare col metodo dell'immersione unicamente α e β, che risultarono rispettivamente

$$\alpha = 1{,}498 \pm 0{,}001 \text{ (Na)}, \qquad \beta = 1{,}500 \pm 0{,}001 \text{ (Na)}.$$

La bisettrice acuta positiva coincide, come sempre, con y ed emerge quindi normalmente dalle lamine di sfaldatura, sulle quali si osservano assai nettamente le figure di interferenza.

Come nella maggior parte delle Heulanditi conosciute, anche in questa, l'aspetto delle lamine a nicols incrociati non è mai uniforme. L'area della sezione appare sempre divisa in settori irregolarmente triangolari, aventi per base i singoli lati del

---

(1) Des Cloizeaux A., *Manuel de Minéralogie*, Paris, 1862, pag. 425.

Mallard E., *De l'action de la chaleur sur l'Heulandite*, « Bull. Soc. Min. de France », vol. 5, 1882, pag. 255.

Rinne F., *Ueber Faujasit und Heulandit*, « Neues Jahrb. f. Min. », 1887, II, pag. 16.

Digitized by Google

contorno e sfumanti nell'interno in un altro settore a contorno indistinto occupante la parte centrale della lamina. Questo predomina nelle lamelle prossime alle facce naturali }010{, mentre è nullo nelle lamine passanti per il nocciolo del cristallo, la cui area è interamente divisa nei settori triangolari, qui molto netti, aventi i vertici nel centro della sezione.

Il comportamento è analogo a quello di moltissime Heulanditi, tra cui quelle studiate dal Rinne (1), che gli fecero formulare l'ipotesi che i cristalli del minerale in parola siano formati da tanti spicchi piramidali incontrantisi nel centro del cristallo ed aventi come base i lati del contorno.

Il numero dei settori osservati in questa Heulandite non è sempre uguale, varia da 4 a 8 secondo le lamine ed i cristalli. Le lamelle superficiali e le facce naturali }010{ non sono neppur esse completamente uniformi, come fu osservato da varii studiosi per Heulanditi di altre località, ma accennano a settori sia pure limitatamente alla porzione periferica, lasciando indivisa la parte centrale, che soffre tuttavia di tutti i disturbi comuni alle lamine a settori di cui dirò ora.

La struttura dell'Heulandite di Prascorsano è ancora complicata dall'esistenza di una fascia indivisa, di vario spessore nelle diverse lamine e nei diversi cristalli, che riveste come una buccia la parte a settori interna, da cui si distingue nettamente per una maggior normalità nel contegno ottico.

Oltre alla divisione in settori, si osserva nettamente per certe posizioni della lamina, rispetto ai nicols incrociati, una franca zonatura parallela ai lati del contorno.

Il confine tra i varii settori è sinuoso ed irregolare, in nessun caso rettilineo come fu osservato per qualche Heulandite.

Ognuno dei campi in cui le lamine sono divise presenta poi la più varia irregolarità nell'orientazione del piano degli assi ottici e nel valore dell'angolo di questi, nonchè della dispersione delle bisettrici e degli assi. Le estinzioni sono estremamente ondulate; partendo da una certa posizione della la-

(1) Rinne, op. cit.

Digitized by Google

mina che a nicols incrociati appare caoticamente chiazzata di chiari e scuri, e ruotando il tavolino in un certo senso, si vedono molteplici onde di estinzione attraversare i varii settori (parecchie per settore). Fa eccezione la zona esterna suddetta che ha pure estinzioni alquanto variabili, ma indipendentemente dalle onde che attraversano il resto della sezione.

La dispersione delle bisettrici, incrociata, è fortissima in certi punti, minore in altri e sopratutto nella fascia periferica in cui è talvolta insensibile. A luce bianca estinzione perfetta non si può in genere ottenere.

L'angolo degli assi ottici è noto variare da 0° a 92° e come media frequentemente osservata nei campi costanti 52°-53°. Nell'Heulandite di Prascorsano è variabilissimo in ogni plaga, ma in molte determinazioni non trovai mai meno di 20°30′ nè più di 47°, valori sempre più bassi della media suddetta.

Le tabelline seguenti varranno a dare idea della variabilità di orientazione ottica delle singole plaghe dei vari settori.

Le osservazioni furono eseguite in punti appartenenti sicuramente allo stesso settore in tutto lo spessore della lamina, a luci rossa (riga C) e verde (riga F) valendomi di schermi colorati monocromatici; gli angoli degli assi ottici vennero misurati col metodo del Mallard usando all'uopo un oculare a filo mobile della Casa Leitz.

Per l'orientazione del piano degli assi ottici riferita ad x, gli angoli δ sono positivi se formati nell'angolo ottuso xz, negativi in caso contrario.

Fascia periferica in vari punti:

$\delta =$	$+72°$	$+59°$	$+86°$	$+89°$	(rosso)

valori poco diversi pel verde

$2E =$	—	23° 20′	37° 40′	—	(rosso)
$2E =$	—	21° 50′	36° 50′	—	(verde)

$$\rho > \upsilon.$$

Digitized by Google

Settori } 201 { :

δ =	+21°	+41°	+5°	(rosso)
δ =	+17°	+36°	—	(verde)
2E =	47°	—	35° 30′	(rosso)
2E =	46°	—	33°	(verde)

$\rho > \upsilon$.

Settori } 001 { :

δ =	−17°	0°	− 3°	9°	(rosso)
δ =	−20°	−4°	−7°	−12°	(verde)
2E =	25° 50′	29° 10′	35° 40′	20° 30′	(rosso)
2E =	28°	33°	41° 20′	21° 50′	(verde)

$\rho < \upsilon$.

Settori } $\bar{2}01$ { :

δ =	−53°	−63°	−57°	−86°	(rosso)
δ =	−43°	−56°	−50°	−78°	(verde)
2E =	—	32° 20′	35° 40′	—	(rosso)
2E =	—	34° 50′	37° 50′	—	(verde)

$\rho < \upsilon$.

Le fotografie (Figg. 2-5), dànno pure e meglio idea dell'anomalo comportamento. Le fot. 2 e 3 a nicols incrociati (22 diametri) sono di una stessa lamina in due diverse posizioni; le fot. 4 e 5 pure a nicols incrociati (14 diametri) sono di due lamine di uno stesso cristallo ma tagliate a diversa profondità.

Disponendo di quantità sufficente di sostanza fu possibile eseguire l'analisi coi seguenti risultati:

H_2O	15,35
SiO_2	57,30
Al_2O_3	17,37
CaO	7,15
Na_2O	1,02
K_2O	1,25
	99,44.

Digitized by Google

Stilbite. — Si accompagna ovunque all'Heulandite, ma non possiede come quella caratteri distinti nelle varie giaciture. Anche di questa zeolite vennero raccolti campioni bellissimi.

Si trova raramente in cristalli con facce non ben definite, opache e fibrose, più sovente in aggruppamenti sferoidali o fascicolati e sopratutto in forma di rosette piane raggiate.

Il colore è per lo più bianco sporco o giallognolo.

Non fu possibile fare alcuna determinazione goniometrica e neppure ottica, salvo quella degli indici di rifrazione, dato che la facilissima sfaldatura secondo } 010 { è normale all'asse di media elasticità.

Col metodo dell'immersione si determinarono su lamine sottili di sfaldatura gli indici di rifrazione

$$\alpha = 1{,}488 \pm 0{,}001 \text{ (Na)}, \qquad \gamma = 1{,}501 \pm 0{,}001 \text{ (Na)},$$

$$\gamma - \alpha = 0{,}013.$$

La birifrangenza è quindi alquanto più elevata di quella della Stilbite di Kilpatrik studiata da Lacroix e M. Lévy e riportata dal Dana (1).

$$n_p = 1{,}494\,, \quad n_g = 1{,}500\,, \quad n_g - n_p = 0{,}006.$$

Rifrangenza e birifrangenza si accordano assai meglio coi valori trovati da Bianchi e Cavinato (2) per le Stilbiti del Miage e di altre località per le quali nei diversi casi n_g, n_p, $n_g - n_p$ stanno nei seguenti limiti:

$$n_g \quad 1{,}503 - 1{,}499\,, \qquad n_p \quad 1{,}492 - 1{,}489\,,$$

$$n_g - n_p \quad 0{,}012 - 0{,}010.$$

P. sp. 2,14 (a 16°).

---

(1) Dana E. S., *The System of Mineralogy*, New York, 1914, pag. 583.

(2) A. Bianchi e A. Cavinato, *I minerali del Miage*, "Atti Soc. Ital. Sc. Nat.", vol. LXIV, 1925, pag. 132.

Digitized by Google

Anche della Stilbite venne eseguita un'analisi con materiale controllato al microscopio coi seguenti risultati:

H_2O	17,05
SiO_2	57,57
Al_2O_3	16,06
CaO	7,96
Na_2O	1,21
	99,85

Mi sarebbe interessato fare, per entrambe le zeoliti, anche qualche osservazione sulla disidratazione, ma la quantità di materiale rimasta a mia disposizione dopo eseguite le esperienze precedenti mi parve troppo esigua, di modo che dovetti rinunciarvi.

Baritina. — In alcune geodi si trovarono dei fascetti di cristalli di questo minerale, limpidi, giallognoli, a spigoli un po' arrotondati e con le forme:

$\}001\{$ $\}010\{$ $\}011\{$ $\}102\{$ $\}111\{$ $\}113\{$.

Torino, Istituto Mineralogico della R. Università, febbraio 1929.

Digitized by Google

Fig. 2.

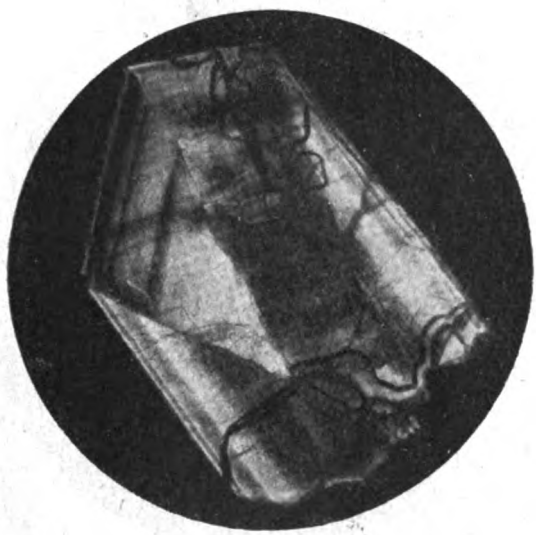


Fig. 3.

Figg. 2 e 3. — Lamina di sfaldatura } 010 { di Heulandite in due diverse posizioni rispetto ai nicols. Nicols incrociati. Ingrand. 22 diam.

Digitized by Google

Digitized by Google

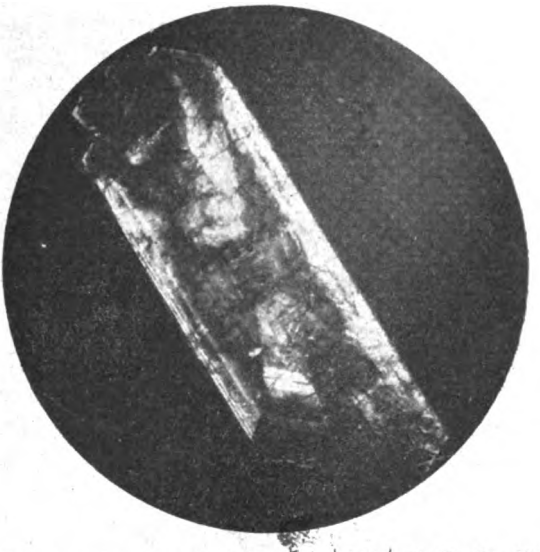


Fig. 4. — Lamina di sfaldatura } 010 { di Heulandite passante pel nocciolo del cristallo.
Nicols incrociati. Ingrand. 14 diametri.

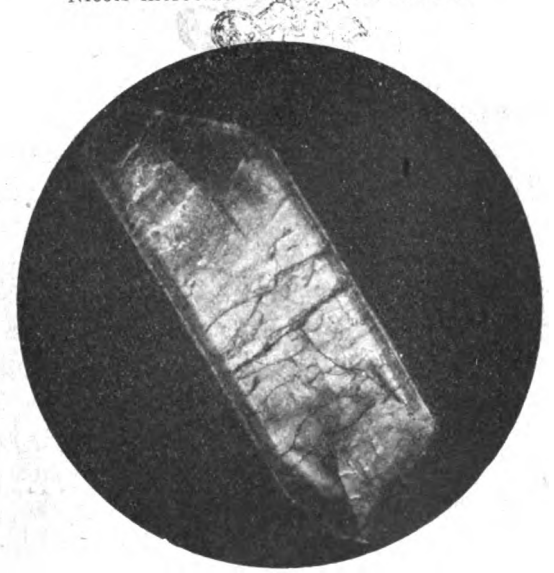


**Fig. 5. — Lamina di sfaldatura } 010 { di Heulandite prossima alla superficie del cristallo.
Nicols incrociati. Ingrand. 14 diametri.**

Digitized by Google

Digitized by Google

Appunti per uno studio sulle "Spugne„ del Permiano di Sicilia (Bacino del Sosio).

Nota del Socio naz. resid. C. F. PARONA

Non è il caso di esporre notizie particolareggiate sul Permiano di Sicilia: in tutti i trattati di Geologia se ne parla, come di un giacimento tipico, in considerazione dell'importanza che gli affioramenti dei *calcari* bianchi, porosi *a Schwagerina* offrono per la ricchezza straordinaria in fossili ben conservati, complessità della fauna, e per gli interessanti rapporti ch'essa presenta colle faune sincrone di lontani paesi, nonchè per la conoscenza dell'evoluzione delle faune marine dal Paleozoico più recente al Mesozoico più antico. Ricorderò soltanto che recentemente le ricerche del collega prof. R. Fabiani lo hanno condotto a riconoscere, che le piccole masse (Rocca di S. Benedetto, Rupe del Passo di Burgio e Pietra di Salomone) lungo la valle del torrente di S. Calogero sono rinserrate " fra depositi del Trias (marne, argille, con intercalazioni di calcari lastriformi ad *Halobia* e *Posidonomya*) più o meno intensamente piegati e disturbati, ma con una disposizione d'insieme, che rivela i residui di una cerniera anticlinale deformata e spezzata „ (1).

Il prof. Fabiani chiude la sua comunicazione coll'augurio, che possa completarsi finalmente l'illustrazione di questa fauna permiana, della quale i foraminiferi, le spugne, i coralli, i cri-

(1) R. Fabiani, *Primi risultati di nuove ricerche negli affioramenti permiani del bacino del Sosio* (Palermo), " Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei „, 1° sem. 1926, pag. 612.

Digitized by Google

noidi, i briozoi e non pochi brachiopodi (1) e molluschi restano da far conoscere: impresa utile ed anche degna della memoria dell'illustre paleontologo palermitano G. G. Gemmellaro, che, scoprendo la fauna e iniziandone l'illustrazione (1887-1899), dimostrò come la vita marina nel Permiano, ritenuta fino allora piuttosto povera, risultasse inaspettatamente invece assai ricca, quanto in altri periodi paleozoici più antichi. Invitato direttamente e ripetutamente dal collega a partecipare all'impresa, e precisamente ad occuparmi dello studio delle " spugne „, che costituiscono parte cospicua della fauna per abbondanza e varietà di forme, ho infine accettato, non nascondendomi per altro le difficoltà da superare, che infatti, a studio iniziato, mi risultarono gravi e forse non tutte superabili.

Poichè il completamento del lavoro esigerà lungo tempo, parmi ora opportuno di annunciarlo, riferendone sommariamente i primi risultati, e presentando avanti tutto l'elenco delle opere consultate, alle quali mi riferirò nei brevi appunti paleontologici.

1. Diener C., *The Permo-carboniferous Fauna of Chitichum*, n° 1, " Palaeontol. Indica „, ser. XV, Himálayan Fossils, I, 1915.
2. Douvillé H., in " Mission scientifique en Perse par J. de Morgan „. III, *Études géol.*, Partie IV, *Paléontol.*, Paris, 1904, pag. 225.
3. — — *Les Spongiaires primitifs*, " Bull. Soc. Géol. France „, XIV, 1914, pag. 397.
4. Dunikowski (v.) E., *Ueber Permo-Carbon Schwämme von Spitzbergen*, " K. S. Vetenskaps-Akad. Handlingar „, XXI, 1884-1885.
5. Gerth H., " *Timorella permica* „ *n. g., n. sp., eine neue Lithistide aus dem Perm von Timor*, " Centralbl. f. M. G. u. Pal. „, Stuttgart, 1909.
6. — — *Die Spongien aus dem Perm von Timor*, 2e Nederland Timor-Expedit., S. Gravenhage-Algemaene Landsdrukkerij, 1927.
7. Girty G. H., *The Guadalupian Fauna*, U. S. S., Prof. Paper 58, 1908.
8. — — *On Some new and old species of carboniferous Fossils*, " Proc. of the U. S. N. Museum „, XXXIV, pag. 281, Washington, 1908.

---

(1) L'illustrazione dei " brachiopodi „ per parte del Gemmellaro e poi del Di Stefano (1914), fu ripresa recentemente dal Dott. Giovanni Merla, *Contributo alla conoscenza della Fauna dei calcari a " Schwagerina „ della Valle del Sosio*, " Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. „, Memorie, XXXVIII, 1927.

Digitized by Google

9. Hayasaka Ichirô, " *Amblysiphonella* „ *from Japan and China,* " The Sc. Rep. of the Tôhoku Imp. Univ. „, Sendai, Japan, Sec. Ser. (Geology), V, n. 1, 1918.

10. Hinde G. J., *Catalogue of the fossil Sponges in the Geol. Departm. of the Brit. Museum,* London, 1883.

11. — — *On the Genus Hindia Duncan, and the Name of its Typical Species,* " Ann. a Mag. Nat. Hist. „, XIX, 1887.

12. — — *A Monograph of the British Fossils Sponges,* II Spong. of the Palaeoz. Group, Palaeontogr. Soc., 1887, 1888.

13. — — *On the Chert and Siliceous Schits of the Permo-Carboniferous Strata of Spitzbergen, and on the Characters of the Sponges therefrom, which have been described by Dr. E. von Dunikowski,* " The Geol. Magaz. „, V, 1888.

14. — — *On* " *Pemmatites costipatus* „ sp. n., *a Lithistid Sponge from the Yoredale Beds of Yorkshire,* " The Quart. Journ. Geol. Soc. of London „, LII, 1896.

15. King W., *A Monogr. of the Permian Fossils of England,* Palaeontogr. Society, London, 1850.

16. Lange E., *Eine mittelpermische Fauna von Guguk Bulat* — Padanger Oberland, Sumatra — Beiträge zur Geolog. und Palaeont. von Sumatra. Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgeg. von A. Tobler, Basel, 1925.

17. Mansuy H., *Faunes des Calcaires à Productus du Cambodge-Spongiaires,* " Mém. du Serv. géolog. de l'Indochine „, II, fasc. IV, pag. 107, 1913.

18. Kauff H., *Palaeospongiologie,* " Palaeontographica „, XL, 1893-94, XLI, 1895.

19. Schellwien E., *Die Fauna der karnischen Fusulinenkalks,* " Palaeontographica „, XXXIX, 1892.

20. Steinmann G., *Pharetronen-Studien* (*Sphinctozoa*), " N. Jahrb. f. M. G. u. P. „, II Bd., pag. 139, Stuttgart, 1882.

21. Stuckenberg A., *Korallen und Bryozoen der Steinkohlenablagerungen des Ural und des Timan,* " Mém. du Comité Géologique, Russ. „, X, n° 3, 1895.

22. Tschernyschew Th., *Ueber die Artinsk- und Carbon-Schwämme von Ural und vom Timan,* " Verhandl. d. Russ. K. Miner. Gesellsch. „, XXXVI, Petersburg, 1898.

23. Vinassa de Regny P., *Triadische Algen, Spongien, Anthozoen und Briozoen aus Timor,* " Palaeontol. von Timor „, Stuttgart, 1915.

24. Waagen W., *Salt-Kange Fossils* (I, Productus Limestones Fossils), *Coelenterata,* " Palaeont. Indica „, ser. XXXIII, 1887.

25. Yabe H., *Material for a knowledge of the Anthracolitic Fauna of Japan,* I, " Journ. Geol. Soc. of Tokio „, IX, n° 104, 1902.

Digitized by Google

***

La collezione del Museo di Palermo avuta in esame conta molti campioni e frammenti, non meno di trecento, che provengono nella maggior parte dallo spuntone di S. Calogero e gli altri dalla Rocca di Salomone; essi sono ripartibili in parecchi generi e numerose specie: qualcuno dei primi e non poche delle seconde da ritenersi nuovi per la scienza. Prevalgono le calcispongie; poche infatti, relativamente, quelle attribuibili alle silicospongie; e al pronto loro riconoscimento si oppone la difficoltà dell'intervenuto fenomeno di calcificazione, per cui i tentativi per isolare le spicole, non più silicee, mediante i processi suggeriti dagli autori (1), e valutarle nella loro forma intera in relazione ai caratteri strutturali, mi riescono finora incerti o vani. Si può, entro certi limiti, rimediare con sezioni sottili, spesso con ottimi risultati, col sussidio della fotografia.

Ciò premesso, passiamo, con qualche cenno, in rassegna i generi riconosciuti, a cominciare dalle calcispongie e dall'interessante gruppo di generi a caratteri primitivi, che Steinmann ha riunito, col tipico genere *Barroisia* Mun.-Chalm., sotto il nome di *Sphintoxoa* (**20** e **3**) (2).

Sollasia n. f. — Il tipo del genere è la *Sollasia ostiolata* Steinmann (**20**) del calcare carbonifero di Sabargas in Spagna (Asturie). L'unico esemplare, formato da quattro articoli, può essere confrontato con due forme: *Sollasia ostiolata* Steinm. (**20**, pag. 151, tav. VII, figg. 3, 3*a*, 3*b*) e *Taumastocoelia cassiana* Steinm. triassica (**20**, pag. 153, tav. VII, figg. 5, 5*a*, 5*b*, e tavv. VIII, IX), presentando per altro una statura tre volte maggiore. A quest'ultima si avvicina nell'aspetto per la suc-

(1) Ved. l'opera colle più recenti istruzioni e direttive: Léon Moret, *Contribution à l'étude des Spongiaires siliceux du Crétacé supérieur français*, " Mém. Soc. Géol. de France „, t. II, 1926; III, 1926, 1re part., cap. I, II.

(2) Ved. anche: Y. Delage et E. Hérouard, *Traité de Zoologie Concrète*, tome II, *Spongiaires*, pag. 79, Paris, 1899.

Digitized by Google

cessione e conformazione degli articoli, collegati da sutura ben impressa; ma per gli altri caratteri, superficie liscia, posizione dei cercini agli ostioli dei canali parietali, canale assile unico, rapporti strutturali fra i successivi articoli, esso spetta evidentemente al gen. *Sollasia*. Ricordo che il gen. *Sollasia* è citato con dubbio da Girty (7) fra le spugne del Guadalupiano.

Celyphia n. f. — Questo genere del Pomel è noto finora come triassico (S. Cassiano), ed io mi riferisco alla trattazione fattane dallo Steinmann (20, pag. 158, tav. VII, figg. 6-10; tav. IX, fig. 3), illustrando la *Celyphia marginata* (Münst.). I campioni in buon numero appartengono probabilmente almeno a due forme specificamente diverse: non pochi di essi risultano di parecchi articoli subglobulari, sovrapposti in serie diritta o tortuosa, a rapido o a lento sviluppo in grandezza degli articoli. Noto particolarmente la forma che meglio si avvicina alla *C. marginata*, per la conformazione e collegamento degli articoli, stato della superficie e caratteri degli ostioli; può dirsi che ne differisca soltanto per la statura maggiore.

Amblysiphonella vesiculosa (Koninck). — Sono numerosi i frammenti che, con ogni probabilità, appartengono a questo genere, e, in base ai caratteri esterni specialmente, sembrano raggruppabili in diverse forme. Il controllo dei caratteri interni rivelerà se spettano a forme nuove, o se e a quali forme conosciute e descritte [Steinmann (20), Waagen e Wentzel (24), Diener (1), Yabe (25), Hayasaka (9), Girty (7), Vinassa (23), Douvillé (2, 3, calcari a *Fusulinella* della Persia)] esse possono essere attribuite. La presenza della grande *Amblysiphonella vesiculosa* (Koninck), Waagen et Wentzel (24, middle *Productus* limestone) mi pare in ogni caso accertata, anche per la struttura interna di un piccolo esemplare e dall'aspetto di un esemplare di statura notevolmente superiore a quella del più grande figurato dai due autori citati (24, pag. 973, tav. 122).

In contrasto con questa *Amblysiphonella* gigante sta un'esile forma congenere, contraddistinta dalla brevità del diametro trasverso in rapporto colla lunghezza del cilindro.

Digitized by Google

N. gen. (cfr. *Barroisia* Mun.-Chalm., in Steinm.), **n. f.** — Mi riferisco ad una spugna del giacimento siciliano e della collezione padovana, favoritami in esame dall'amico prof. G. Dal Piaz, la quale nell'aspetto esterno di forma articolata si avvicina alla *Sebargasia carbonaria* Steinm. (**20**, pag. 171, tav. VI, fig. 2), differendone tuttavia per la maggior statura, ma specialmente perchè gli articoli, in serie lineare sovrapposti, sono separati l'uno dall'altro da un solco profondo e sono circolarmente nella linea mediana assai prominenti a guisa di corona, quasi anelli irregolari e ineguali fortemente carenati: carattere che la contraddistingue anche dalla *Amblysiphonella*. D'altra parte questa spugna si allontana dallo schema strutturale interno di questi due generi: manca infatti un vero canale assile, continuo, largo e subregolare, ed è un succedersi di lacune, più o meno ma sempre ampie, pure irregolari, angolose in sezione, tre o quattro per ciascun articolo, così da ricordare la *Barroisia anastomosans* (Mant.) dell'Aptiano (**20**, pag. 116, tav. VIII, fig. 1; **3**, pag. 399, tav. XII, figg. 4, 5), quando in essa l'irregolarità strutturale interna è molto accentuata. In qualche lembo ben conservato della superficie esterna, le fini granulosità dei pori si presentano evidenti, numerose, arrotondate.

Steinmannia gemina Waagen e Wentzel. — A questa fra le due specie degli autori citati (**24**, pag. 982, tav. CXXIV) attribuisco parecchi esemplari, che le corrispondono per statura, per il fatto della geminazione ed anche per la struttura interna, posta in evidenza da una sezione longitudinale. Il riferimento è stabilito anche in confronto delle due specie americane del Girty (**7**, **8**) e delle forme triassiche istituite dal Vinassa de Regny (**23**).

Colospongia n. f. — Attribuisco a questo genere del Laube una n. f., la quale, a parte la statura alquanto maggiore e l'ornamentazione dalla superficie a reticulato più evidente e regolare, ha spiccata affinità con la *Colospongia dubia* (Münst.) del Trias di S. Cassiano (Steinmann, **20**, pag. 173, tav. VI, fig. 3) per l'irregolarità di sviluppo dei segmenti e loro rapporti, andamento e sviluppo del condotto assile.

Digitized by Google

Guadalupia cylindrica Girty? — L'interessante genere del Girty è ben rappresentato nella fauna siciliana, ed una delle forme potrei senza esitare riferire alla *Guad. cylindrica* Girty (7, pag. 81, tav. V, fig. 12 ; tav. VI, figg. 3, 4) in vista della perfetta corrispondenza nella struttura largamente lacunare, quale risulta dalle sezioni trasverse e longitudinali. Ma resta qualche dubbio, perchè, mentre dalle figure del Girty non appare che la superficie esterna dei suoi esemplari cilindroidi sia granulare, nei nostri invece, che non raggiungono la statura di quelli della Guadalupa, la superficie esterna è distintamente granulare, e qua e là nodulosa. È da notare, tanto per la *Guad. cylindrica* Girty, quanto per la *Guad. zitteliana* Girty, la somiglianza della struttura della zona marginale (sez. trasv.), sebbene meno regolare, con quella del gen. *Coscinocyathus,* in modo anche più evidente che nel gen. *Amblysiphonella* (cfr. 3, tav. XII, fig. 9, *a*, *b*).

Fra le calcispongie, o ritenute tali, sonvene altre di riferimento tuttora dubbioso. Parecchi esemplari spettano forse al genere *Cysthothalamia* Girty (7, pag. 89) e taluni fors'anche alla *C. nodulifera* Girty (7, tav. VII, figg. 1-3). Una forma, nell'aspetto esterno e nei caratteri strutturali, ricorda assai da vicino *Mieandrostia Kanzanensis* Girty n. g., n. sp. (8, pag. 285, tav. XV, fig. 1) del giacimento a *Steinmannia* di Chanute nello Stato del Kansas. Della stessa provenienza è *Heliospongia ramosa* Girty (8, pag. 289, tavv. XVI, XVII), alla quale si avvicina un'altra spugna siciliana; ma la non buona conservazione della superficie dei rami e della struttura interna non permette, coi materiali in esame, un risolutivo studio, anche se esteso in confronto di silicospongie a forma ramosa, ad es. con quelle del gen. *Doryderma* Zittel. Posso infine notare certe affinità di altri esemplari, e numerosi frammenti di spugne cilindroidi, coi generi *Enoplocoelia* Steinm. (20, pag. 166, tav. VI, fig. 4) degli strati di S. Cassiano, e *Sphaerocoelia* Steinm. (20, pag. 162, tav. VII, fig. 4; 3, pag. 402, tav. XII, figg. 1-3) del Cenomaniano.

Riassumendo, e attenendomi alla classificazione di Steinmann integrata da quelle di Girty, risulta già notevole, per

Digitized by Google

l'Ordine *Sycones*, Sottordine *Sphintoxoa*, il numero dei generi accertati come presenti nella fauna permiana sicula. Delle famiglie: Sphaeroelidae i generi *Sollasia, Steinmannia, Celyphia*; Sphaerosiphonidae i generi *Enoplocoelia, Amblysiphonella*; Guadalupiidae il gen. *Guadalupia*; Cystothalamiidae il gen. *Cysthothalamia*.

Passiamo ora al gruppo delle Silicospongie, con poche specie per ora, perchè parecchie spugne mi restano indeterminate, non conoscendo generi e specie cui riferirle e dovendosi meglio chiarire i loro caratteri strutturali per accertare che sono effettivamente, come pare, nuovi per la scienza.

Virgula cfr. **malayica** Gerth. — Attribuisco al gen. *Virgula* Girty una delle spugne della fauna siciliana rappresentata da numerosi esemplari, ma colle stesse riserve espresse dal Gerth per la sua *Virgula? malayica*, non risultando nettamente quali siano i caratteri strutturali interni delle due forme guadalupianetipo, *V. neptunia* e *V. rigida* Girty (7). La nostra forma nell'insieme dei caratteri esterni, colla sua ornamentazione a cercini e strozzature anulari e irregolari, ricorda la *V. rigida* Girty (7, pag. 74, tav. VII, figg. 13, 14), ma nella statura la supera di gran lunga: così per l'aspetto esterno somiglia in modo evidente alla *V.? malayica* Gerth (6, pag. 115, tav. V, figg. 2, 2*a*), e altrettanto posso dire riguardo ai caratteri strutturali, che nelle sezioni trasversali e longitudinali dei nostri esemplari si possono ancora più chiaramente studiare.

Timorella n. f. — Una sessantina di esemplari, che in grande maggioranza appartengono certamente ad una sola specie, nell'aspetto ficoide si avvicinano assai ad *Aulocopella cepa* (Fr. Roemer) Rff. e ad *Aulocopium aurantium* Oswald del Siluriano (Rauff, 18, pag. 392, tav. XXIV), pur distinguendosi per la forma quasi costante, per la minor statura e per essere lungamente peduncolati, mentre non mancano caratteri di affinità strutturale, in particolare colla prima delle due specie citate. Ed è infatti colla *Aulocop. cepa* che il Gerth confronta la sua *Timorella permica* (6, pag. 122, tav. V, fig. 5; tav. II, figg. 1, 1*a*; tav. VII, fig. 5; tav. I, fig. 5), tipo del genere pur suo, al quale

Digitized by Google

ritengo debba essere assegnata la spugna siciliana, che è la più ricca di esemplari fra quante costituiscono la fauna. L'identità specifica colla *T. permica* non risulta; i nostri esemplari più grandi sono di un terzo più piccoli di quello figurato dall'autore (5, pag. 696, fig. 1); meno numerose e più fini rughe e solchi, che irradiano irregolarmente dall'osculo, il peduncolo, più o meno allungato, non manca mai, determinando appunto nettamente l'aspetto ficoide, mentre la *T. permica* appare piuttosto arrotondata; nè a diverse conclusioni porta il confronto colle altre due forme illustrate dal Gerth. Così l'identità manca per quanto riguarda la struttura interna, che nella forma siciliana è in generale ben conservata, come dimostrano le ben riuscite fotografie delle sezioni, assai espressive. Superficie esterna finamente granulare, con pori numerosi. Restano per altro a chiarire gli eventuali rapporti con *Anthracosycon ficus* n. g., n. sp. Girty (6, pag. 72, tav. VII, fig. 2).

Dagli esemplari della descritta forma altri in minor numero si differenziano perchè più allungati, cilindroidi, coll'osculo meno distintamente stelliforme, ma essenzialmente non differenti nei caratteri interni strutturali.

? **Stuckenbergia** sp. — Qualche esemplare cilindroide, irregolare di forma, se non per l'aspetto generale della spugna, ma piuttosto per la corrispondenza nei caratteri strutturali interni, posti in evidenza dalle sezioni, in confronto con quelli della *Stuckenbergia ufensis* (Stuck.) (in Tschernyschew, 22, pag. 39, fig. 13 = *Kazania ufimiana* Stuckenberg, 21, pag. 184, tav. XVIII, fig. 4), mi lascia credere che anche questo genere, o un genere strettamente affine, sia rappresentato nella fauna siciliana.

Come per il gen. *Stuckenbergia,* parecchi altri riferimenti di spugne della collezione in esame rimangono indecisi; ma spero di avere altro materiale di studio e di poter risolvere i dubbî. Molto probabile è la rappresentanza del gen. *Hindia* Duncan (11), specialmente per una forma che ha affinità con *H. Wanneri* Gerth (6, pag. 100, tav. III, fig. 1, *a*, *b*; II, fig. 7). Altrettanto posso dire sulla presenza del gen. *Pemmatites* Dunikowski (4), se considero la descrizione di *Pemmatites timo-*

Digitized by Google

rensis Gerth (6, pag. 102, tav. III, figg. 5-8). Non del tutto sicura rimane l'attribuzione al gen. *Palaeojerea* Gerth di altra forma, per quanto notevoli siano le affinità di struttura, se non d'aspetto, con *Palaeojerea Molengraaffi* Gerth (6, pag. 112, tav. VIII, fig. 1, *a*, *b*; tav. I, fig. 2). Sarei tentato di attribuirne un'altra a *Palaeoderma tubulosa* Gerth n. g., n. sp. (6, pag. 116, tav. V, fig. 6, *a*, *b*), ma l'unico frammento è troppo poca cosa per accertare il riferimento, tanto più che il diametro dei canali caratteristici non è uniforme, ma varia dall'uno all'altro. Così spero che nuove indagini risolveranno le incertezze sulla determinazione di altre spugne, che hanno affinità con altri generi istituiti dal Gerth: *Pycnospongia (P. timorensis)* Gerth (6, pag. 113, tav. II, fig. 6; tav. VII, fig. 1, *a*), *Aulacospongia (A. Hanieli)* Gerth (6, pag. 118, tav. I, fig. 6; tav. II, fig. 4; tav. VIII, fig. 2, *a*).

Parecchie altre spugne appartengono alla fauna siciliana, che non hanno corrispondenze coi generi finora citati, e che sono probabilmente tipi di generi non ancora descritti. Altri si avvicinano piuttosto a generi del Paleozoico antico: quali *Pattersonia* S. A. Miller, *Brachiospongia* Marsh, *Pycnopegma* Rff. ecc. (ved.: in Hinde (10-14) e in Rauff (18)); così ricordo anche due frammenti, che nel disegno geometrico della ornamentazione esterna riproducono esattamente quello in particolar modo caratteristico della *Sphaerospongia tessellata* (Phillips) (12, pag. 136, tav. IV, fig. 2, *a*, *b*) del Devoniano. Queste affinità di generi contribuiscono a conservare alla fauna stessa l'impronta paleozoica, e nel tempo stesso, insieme cogli altri generi, ne attestano la ricchezza e complessità.

*
* *

Queste brevi note, in attesa dello studio completo e delle conclusioni, possono dare un'idea della larga parte che anche le spugne hanno nella composizione della fauna dei calcari a *Schwagerina* di Sicilia dell'Eopermico (Artinskiano superiore): nelle deduzioni da questo esame preventivo bisogna però procedere cauti per non pregiudicare quelle definitive. Considerando l'insieme dei fossili delle diverse classi, che compongono la ricca fauna, riesce evidente il carattere neritico del deposito di cal-

Digitized by Google

care bianco conchigliare che la contiene; di un livello neritico, confermato dalla presenza di spugne calcari e di silicospongie lithistidi, ma di litorale abbastanza profondo, data specialmente l'abbondanza dei brachiopodi.

Le spugne riconosciute specificamente, o almeno genericamente, suggeriscono confronti interessanti con altri giacimenti, con altre faune: e al riguardo accenno innanzi tutto alle affinità col gruppo di spugne faretrone illustrate dallo Steinmann (20), non solo per le corrispondenze con spugne del calcare carbonifero (Uraliano) di Sebargas nelle Asturie, ma anche per le affinità con spugne della fauna triassica di S. Cassiano, in contrasto abbastanza singolare col fatto, che per le faune del Carbonifero e del Permiano della Carnia nessun autore nota la presenza di spugne, tranne Schellwien (19), che accenna solo al gen. *Amblysiphonella*.

È nota l'abbondanza di spicule di Spongiari (*Pemmatites*) nelle ftaniti a *Productus* del Permiano inferiore dello Spitzberge (4, 14); ora la presenza del gen. *Pemmatites* nella nostra fauna non è da escludere. Riguardo alla fauna degli strati artinskiani degli Urali e di Timan, già fu notato dagli autori il ristretto numero di specie comuni colla fauna siciliana, nella quale le ammonidee dimostrerebbero un più avanzato grado di evoluzione: ora questa scarsità di forme comuni non è contraddetta dallo studio delle spugne in esame (21, 22). Il genere *Amblysiphonella* ricompare in Persia (2, 3): così per questa classe di fossili i rapporti colla fauna della Salt-Range imalaiana (Carbonifero superiore e Permiano) sono limitati alla comunanza di forme dei generi *Amblysiphonella* e *Steinmannia* (1, 24); come si può ripetere per i giacimenti dell'Indocina (17), della Cina e del Giappone (9, 25). Il gen. *Amblysiphonella* è citato con dubbio dal Lange (16) per il Permiano medio di Sumatra, particolarmente ricco di foraminiferi, con rappresentanti del gen. *Molengraaffia* Vin. (23), che finora non mi risulta presente nella nostra fauna.

Più notevoli sono le affinità riscontrate colle spugne del Permiano di Timor, illustrate recentemente dal Gerth (5, 6): egli distribuisce le 23 forme riconosciute, e tutte nuove, in 11 generi, dei quali ben 8 nuovi: per verità poche sono le forme

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

che mi risultarono con certezza finora comuni alle due faune, ma assai significative; in particolar modo una specie del genere *Timorella*, che è la spugna più ricca di esemplari fra tutte le nostre, e si può prevedere, che le affinità risulteranno più estese col procedere delle ricerche.

Passando in fine ai giacimenti antracolitici superiori dell'America settentrionale, sono fors'anche più interessanti i confronti coi risultati degli studî del Girty (7, 8) sulle faune del Guadalupiano, cioè della Sierra di Guadalupa al sud-ovest del Nuovo Messico, ovest del Texas, a numerosi brachiopodi, con rappresentanza di generi asiatici, e sulla fauna raccolta presso Chauute nello Stato del Kansas. È da segnalare la comunanza dei generi *Amblysiphonella*, *Steinmannia*, *Guadalupia*, *Virgula*, per ricordare soltanto quelli accertati, con specie strettamente affini, se non identiche, alle forme congeneri della fauna siciliana.

Se consideriamo poi la fauna siciliana anche semplicemente in base ai generi riscontrativi, riconosciuti con sicurezza o con molta probabilità di esattezza, in confronto colla fauna di Guadalupa, descritta dal Girty, prevalentemente composta di generi di calcispongie, e con quella di Timor a silicospongie, fatta conoscere del Gerth, rileviamo un altro fatto interessante; che cioè la nostra fauna, nella sua ricchezza, ha comuni un buon numero dei due gruppi di generi, che finora si conoscevano separatamente esclusivi o alla fauna di Guadalupa o a quella di Timor. E qui occorre avvertire, che non è il caso di sospettare, che nel giacimento siciliano calcispongie e silicospongie siano ripartite in due differenti livelli, in quanto che le une e le altre trovai associate nei campioni del calcare fossilifero.

Da questa rapida rassegna risulta dunque, che il contributo portato alla fauna permiana del calcare a *Schwagerina* di Sicilia collo studio delle spugne deve riuscire utile, non solo per la migliore e più estesa conoscenza paleontologica del giacimento siciliano, e, in generale, dello sviluppo evolutivo delle spugne nel tempo, ma anche sotto il punto di vista paleogeografico, per i rapporti e le affinità faunistiche, che vanno meglio delineandosi fra i depositi marini permiani nella loro distribuzione geografica, così largamente estesa ai tre continenti ora ricordati.

Digitized by Google

Thomsonite e scolecite dell'alta Valle di Ayas e delle Valli di Lanzo.

Nota di VIRGINIA GENNARO
presentata dal Socio nazionale residente E. Repossi.

Già diversi autori si occuparono frammentariamente dei giacimenti in pietre verdi dell'alta Valle d'Ayas, descrivendone alcuni interessanti minerali.

Per primo il Novarese diede notizie del giacimento della Bettolina Nord, valico situato appena a settentrione del Monte Rosso di Verra, che mette in comunicazione l'alta Valle di Gressoney con l'alta Valle d'Ayas; quivi nella massa prasinitico-serpentinosa che va ad appoggiarsi ai gneiss-micascisti del M. Rosa compaiono nuclei ben evidenti di granato, epidoto, diopside, clorite, anfibolo, magnetite ed altri minerali, e la precisa descrizione di tale giacimento precede uno studio dello Zambonini su di un ricco epidoto di questa località (1).

Successivamente il Boeris studiò un altro epidoto proveniente da un masso caduto con tutta probabilità dalla Rocca di Verra (2), dove con molta verosimiglianza si ripetono giacimenti simili a quelli del Monte Rosso, ed avendo egli visitato anche questi ultimi, oltre i minerali già rinvenuti dal Novarese, ve ne notò alcuni altri e precisamente titanolivina, perowskite, ilmenite, diopside, prehnite, clorite (3). Parte del materiale pos-

(1) F. Zambonini, *Sull'epidoto del Passo Bettolina, Vallone di Verra*, " Rend. R. Acc. Lincei „, s. V, XII, p. 567. Roma, 1903.

(2) G. Boeris, *Sull'epidoto della Valle di Ayas*, " Mem. R. Acc. Scienze „, serie VI, tomo VI. Bologna, 1909.

(3) G. Boeris, *Appunti di mineralogia valdostana: minerali del M. Rosso in Valle di Ayas*, " Rendic. R. Acc. Scienze „, Bologna, 1910.

Digitized by Google

seduto dal Boeris e quello più tardi raccolto dal Bianchi, fu affidato per lo studio al Carpanese, che lo iniziò pubblicando una nota (1) sull'epidoto del M. Rosso di Verra, che completa il lavoro dello Zambonini sullo stesso minerale della medesima località.

Nella collezione di minerali piemontesi del Museo di Torino mancavano affatto campioni provenienti da questo interessante giacimento, che mi recai a visitare con lo scopo appunto di colmare tale lacuna.

Ebbi così agio di constatare che non solo sul versante di Ayas, ma anche sul versante di Gressoney sono assai diffuse le lenti di granato accompagnato dai soliti minerali. Infatti percorrendo il sentiero che dal Colle della Bettaforca sale al Rifugio Quintino Sella, in tutta la zona serpentinosa che precede quella delle prasiniti anfiboliche si susseguono numerose le lenti di granatite, lenti che pel colore, la disposizione, il rivestimento di clorite ricordano perfettamente quelle degli analoghi giacimenti di Comba Robert, della Gava, di S. Ambrogio, ecc. Però, siccome la roccia vi è compatta e priva di fessure, rari sono i minerali ben cristallizzati, e infatti non mi fu possibile raccogliere che alcuni campioni di granato, diopside e vesuvianite verde chiara. Nelle serpentine si osservano inoltre frequenti noduli di talco lamellare, di titanolivina e, presso al contatto con le prasiniti, grossi individui di titanite che in alcuni punti è rosea, tanto da far pensare alla greenovite già altre volte riscontrata in rocce verdi (2).

E proprio nell'esaminare con una certa attenzione questa zona di contatto fra i serpentini e le prasiniti anfiboliche, nelle *ciapere* che dal sentiero Bettaforca-Capanna Sella scendono verso la Valle d'Ayas, la mia attenzione fu attirata da incrostazioni bianche che, abbastanza numerose, compaiono sui massi di prasinite. E feci raccolta di questo materiale, che in escursione

(1) T. Carpanese, *L'epidoto del M. Rosso di Verra (Gruppo del M. Rosa)*, « Rend. R. Acc. Lincei „, serie VI, II, 276. Roma, 1903.

(2) E. Repossi, *La bassa Val della Mera* (Parte 2ª), « Mem. Soc. It. Sc. Nat. „, VIII, 114. Pavia, 1916.

Digitized by Google

successiva trovai pure diffuso più a nord, e precisamente nelle ciapere prasinitiche, sempre del versante di Ayas, presso al confine prasiniti-gneiss e micascisti del M. Rosa. Questi due contatti corrispondono sulla carta al 50.000 ai due passi della Bettolina (m. 2896) e della Bettolina Nord (quest'ultimo è solo indicato dalla quota m. 3157).

Già un esame sommario mi permise di ascrivere a due specie diverse il materiale raccolto. Infatti alcuni blocchi di prasinite portano alla superficie sferette bianche che, spezzate, hanno l'aspetto di coccarde a struttura raggiata, formate da un aggregato di aghetti cristallini abbastanza lucenti.

Altri blocchi, e questi assai più numerosi, recano vere incrostazioni, sia alla superficie, sia come riempimento di fessure, costituite pure da aggregati cristallini, ma assai più minuti ed opachi dei precedenti.

In entrambi i casi è impossibile isolare cristalli anche piccoli che si prestino a misure, perciò per la identificazione ho dovuto accontentarmi dello studio ottico e chimico.

Le determinazioni ottiche furono eseguite su frammenti di minerale schiacciato fra due vetrini. Pel primo dei due minerali a cui ho ora accennato gli aghetti cristallini hanno sempre estinzione parallela all'allungamento: possiedono facile sfaldatura secondo una faccia della zona d'allungamento dalla quale esce la bisettrice acuta con carattere positivo e secondo un'altra della medesima zona dalla quale emerge la bisettrice ottusa. Nelle lamine normali alla bisettrice acuta, che hanno allungamento positivo, la birifrazione è minima, invece diventa forte in quelle normali alla bisettrice ottusa, allungate negativamente.

Sulle lamine di sfaldatura normali alla bisettrice acuta riesce assai facile misurare l'angolo degli assi ottici: questa misura, eseguita a luce gialla coll'oculare micrometrico a filo mobile, e ripetuta più volte su diverse laminette, ha dato come media:

$$2E = 72°.$$

Ho determinato gli indici di rifrazione per mezzo dei liquidi ad indice noto ed ogni volta controllato. Sulle lamine a bassa

Digitized by Google

birifrazione e dalle quali emerge la bisettrice acuta ho misurato nella direzione d'allungamento $n = 1.525$ e in direzione normale $n = 1.523$. Sulle lamine a birifrazione forte e dalle quali emerge la bisettrice ottusa si misura nella direzione dell'allungamento ancora $n = 1.525$ e in direzione normale $n = 1.537$.

Risultano perciò

$$n_p = 1.523$$
$$n_m = 1.525$$
$$n_g = 1.537$$

valori perfettamente d'accordo con quelli dati da Schroeder (1), Scheit (2), Riva (3) per la *thomsonite*. Tale risultato viene anche confermato da quello dell'analisi che potei eseguire, avendo a disposizione non molto, ma sufficiente materiale. Questo fu accuratamente purificato e siccome l'attacco avvenne facilissimamente con HCl, si determinarono tutti i componenti sulla stessa porzione.

H_2O	14.62
SiO_2	37.35
Al_2O_3	29.17
CaO	13.80
Na_2O	4.62
K_2O	0.24
	99.80

P. Sp. = 2.25.

La roccia sulla quale è appoggiata la thomsonite è una tipica prasinite anfibolica con epidoto ordinario, zoisite, clorite, anfibolo actinolite, albite quali componenti essenziali, e titanite, pirite più o meno alterata, rutilo quali elementi accessori.

(1) Schroeder van der Kolk, *Tabellen zur mikr. Best. der Min.* Wiesbaden, 1906.

(2) A. Scheit, *Eine regelmässige Verwachsung von Thomsonit und Natrolit*, « Tschermak min. petr. Mittheil. », XXXI, 495, 1912.

(3) P. Riva, *Thomsonite del territorio di Casarza Ligure*, « Riv. di Min. e Crist. Ital. », XLIII, 61. Padova, 1914.

Digitized by Google

Anche del secondo minerale, che giace sopra una roccia perfettamente simile, salvo forse una maggiore diffusione dell'epidoto, si fece l'analisi, dopo aver determinato il peso specifico e i caratteri ottici.

Gli aghetti cristallini presentano sempre allungamento negativo, estinzione ora parallela, ora inclinata rispetto alla direzione d'allungamento. Da laminette dove si è misurata un'estinzione massima compresa fra i 15°-18°, emerge la bisettrice ottusa con carattere positivo e in esse la birifrazione è discreta, misurandosi in una direzione $n = 1.510$ e in direzione normale $n = 1.518$. Su laminette aventi estinzione parallela nella direzione di allungamento si misura ancora $n = 1.510$ e in direzione normale $n = 1.519$.

Da ciò risulta che

$$n_p = 1.510$$
$$n_m = 1.518$$
$$n_g = 1.519.$$

La bisettrice acuta, di carattere negativo, fa un angolo di 18° circa con z e il piano degli assi ottici è sensibilmente normale a 010.

Sono frequenti individui che presentano tracce di geminazione: misurando le estinzioni simmetriche si ottiene come massimo un valore di 17°.

L'analisi fornisce i seguenti risultati:

H_2O	13.84
SiO_2	46.37
Al_2O_3	25.80
CaO	13.58
Na_2O	0.64
K_2O	0.13
	100.36

P. Sp. = 2.25.

I caratteri ottici e i dati analitici permettono di affermare che il minerale in esame è *scolecite.*

Digitized by Google

Sarebbe stato interessante determinare in queste due zeoliti di località nuova l'andamento della disidratazione, dato il sempre grande interesse che offre la questione della presenza dell'acqua nelle zeoliti, ma si è dovuto rinunciarvi perchè si sarebbe sacrificato troppo del non molto abbondante materiale per riunire la dose di polvere necessaria alle determinazioni numerose e precise quali si richiedono oggi.

***

Nella raccolta piemontese del Museo Mineralogico di Torino esistono parecchi campioni di un minerale zeolitico indicato come *scolecite* e provenienti alcuni da Balme (Val d'Ala), altri da Lemie (Val di Viù) e al Museo Mineralogico del Valentino ho rinvenuto un campione analogo, catalogato come *mesotipo,* proveniente da Lemie. Ora in nessuno dei numerosi lavori sulla Val d'Ala è citata la scolecite: solo il Borson (1) accenna a parecchi campioni di mesotipo aciculare raggiato proveniente da Lemie, a mesotipo in mammelloni ricoprenti una roccia epidotica, proveniente dalle Valli di Lanzo, a mesotipo in pezzi staccati e parzialmente alterato proveniente " dalle sommità della Valle di Viù „, a mesotipo globulare sopra roccia di talco e granato della Mussa (V. d'Ala), a mesotipo di Balme (Ala), ecc.

Il Barelli pure (2) ricorda, attingendo evidentemente la notizia dal Borson, mesotipo bianco, globulare, raggiato nei dintorni di Viù, presso Lemie.

Il Jervis (3) invece non parla affatto di mesotipo, ma cita la thomsonite a Viù e, nel paragrafo consacrato a Lemie, fra i minerali della Torre d'Ovarda.

Ora i campioni del Museo Mineralogico descritti come mesotipo dal Borson nel suo *Catalogue raisonné*, risultano in un

---

(1) E. Borson, *Catalogue raisonné du Musée d'histoire nat. de l'Acad. de Turin*, Turin, 1811, p. 137. — Idem, *idem*, Turin, 1830, p. 289.

(2) V. Barelli, *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna*, Torino, 1835, p. 12.

(3) G. Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia*, Torino, 1873, p. 59.

Digitized by Google

vecchio catalogo manoscritto della raccolta, posteriore al Borson, elencati come scolecite, restando così eliminata la denominazione di mesotipo, che si presta facilmente ad equivoci, giacchè i vecchi autori se ne servivano per indicare sia la natrolite (Natron-mesotyp) che la scolecite (Kalk-mesotyp) (1).

Molto probabilmente i suddetti campioni non provengono precisamente nè da Balme, nè da Lemie, nè dalla Mussa, ma bensì dalla zona prasinitica che separa la Val d'Alà da quella d'Usseglio, poichè la roccia che porta il minerale zeolitico è una di quelle tipiche prasiniti a grana grossa, quali sono diffuse alla Torre d'Ovarda e zona limitrofa.

Il fatto che queste zeoliti si trovano in roccia prasinitica, quindi in giacitura analoga a quelle rinvenute alla Bettolina, e la loro evidente rassomiglianza con queste mi spinsero a studiarle contemporaneamente, sebbene non sia noto con precisione il luogo dove esse furono raccolte.

Si tratta d'una ventina di pezzi, dove il minerale minutamente cristallino forma aggregati globuliformi, croste che tappezzano le fessure della prasinite, allargandosi di tanto in tanto in coccarde.

Evidente sopratutto in alcuni campioni è una struttura zonata della crosta cristallina, che fa subito pensare alla presenza di due minerali diversi, depositatisi l'uno successivamente e sopra l'altro.

L'esame analitico e ottico ha permesso di concludere che due campioni vanno separati dagli altri perchè recano solo prehnite, confusa grossolanamente con la scolecite; alla maggioranza va conservata la dicitura di scolecite, poichè solo questa è presente, invece alcuni altri campioni vanno distinti dai precedenti poichè in essi oltre la scolecite è anche presente la thomsonite.

Sugli strati, sui noduli di scolecite si nota in due o tre campioni anche una generazione di piccoli, ma discreti cristalli, che poterono essere misurati. Sono prismi $\{110\}$ sormontati

(1) C. Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, II Bd., 1684. Leipzig, 1897.

Digitized by Google

da una piramide, che ricordano perfettamente quelli del Miage: già esaminati alla lente mostrano evidente la traccia di una geminazione rispetto alla faccia 100, geminazione che si controlla facilmente osservando il cristallo al microscopio in direzione normale alla 010: si ottengono estinzioni simmetriche con angoli di 16°-17°. Non ho riscontrato traccia di geminazioni più complicate quali sono quelle citate dal Lacroix (1), Bianchi e Cavinato (2) per la scolecite del Miage.

I cristallini impiantati sulle sferule di scolecite fibrosa hanno libera solo una estremità nella quale compaiono quattro facce della stessa forma } 111 { e abbastanza frequentemente faccette lineari di } 101 {, come provano le misure eseguite:

N.	Angoli	Limiti	Medie	Valori calcolati
6	110—1$\bar{1}$0	88.12—88.58	88.28	88.26
8	110—1$\underline{\bar{1}}$0	91.5 —92.12	91.47	91.34
4	111—1$\bar{1}$1	33.31—34.30	34.5	34.18
2	111—101	16.20—17.6	16.43	17.9
6	111—1$\underline{\bar{1}}$1	37.57—38.15	38.4	38 —
3	111—$\underline{111}$	51.17—52.11	51.44	52.4
6	110—111	63.19—64.33	64.21	63.58

Nella tabella gli angoli misurati sono messi a confronto con quelli calcolati da Bianchi e Cavinato, che, meglio di quelli calcolati dal Flink, generalmente riportati nei testi, loro si avvicinano.

Gli indici di rifrazione sono coincidenti con i valori dati di solito per la scolecite e precisamente

$$n_p = 1.512\,,$$
$$n_m = n_g = 1.519\,.$$

(1) A. Lacroix, *Minéralogie de la France*, Paris, 1896, p. 273.

(2) A. Bianchi e A. Cavinato, *I minerali del Miage*, Atti Soc. It. Sc. Nat. „, LXIV. Pavia, 1925.

Digitized by Google

Sia per la scolecite di Viù come per quella della Bettolina, data l'estrema piccolezza dei cristalli che impedisce di staccare laminette normali alla bisettrice acuta, non mi è stato possibile misurare, come avrei desiderato, l'angolo degli assi ottici.

L'analisi ha fornito i seguenti risultati:

H_2O	14.43
SiO_2	45.56
Al_2O_3	25.70
CaO	14.23
Na_2O	0.50
K_2O	0.11
	100.53

P. Sp. = 2.27.

Come già ho accennato, in alcuni campioni sopra i noduli di scolecite si è depositata in forma di crosta cristallina la thomsonite. Fu eseguita l'analisi dei due minerali, che si possono isolare bene l'uno dall'altro, essendo separati da uno strato pulverulento bianco, probabilmente d'alterazione.

In un campione sul quale scolecite e thomsonite erano abbastanza abbondanti e da cui si potè staccare una dose dei due minerali sufficiente per l'analisi, senza guastarlo troppo, la thomsonite è alla superficie un poco alterata e sebbene si sia avuto cura di usare per l'analisi solo la parte interna più fresca, pure risulta dalla percentuale dell'acqua un po' alta e da quella della calce un po' bassa che il minerale è leggermente alterato.

Analisi thomsonite		Analisi scolecite	
H_2O	15.72	H_2O	13.50
SiO_2	37.18	SiO_2	44.63
Al_2O_3	31.81	Al_2O_3	26.68
CaO	12.54	CaO	13.63
Na_2O	3.46	Na_2O	0.66
K_2O	0.14	K_2O	0.18
	100.85		99.28

P. sp. = 2.26.

Digitized by Google

Anche della thomsonite ho determinato gli indici di rifrazione, sebbene la cosa non riesca tanto facile dato l'intorbidamento degli aghetti cristallini e la loro estrema minutezza. Inoltre in questa thomsonite si direbbe assai poco marcata, se non addirittura mancante la sfaldatura 010, giacchè molto difficilmente si riesce ad ottenere le laminette ad allungamento positivo, da cui emerge la bisettrice acuta, necessarie per la misura di n_p. Invece perfetta è la sfaldatura 100. Ad ogni modo, anche se non rigorosamente esatti, gli indici di rifrazione della thomsonite analizzata hanno valori assai prossimi ai seguenti:

$$n_p = 1.528,$$
$$n_m = 1.530,$$
$$n_g = 1.538.$$

Ho pure determinato l'angolo degli assi ottici ($2E = 69°$ a luce gialla) e gli indici di rifrazione per la thomsonite del campione del Valentino, indicato come mesotipo, dove il minerale si presenta non più in aggregati cristallini, ma addirittura in minuti cristalletti quadrati troncati dalla base, freschissimi, ottenendo questi valori:

$$n_p = 1.530,$$
$$n_m = 1.531,$$
$$n_g = 1.541,$$

i quali sono notevolmente più alti di quelli citati comunemente dagli autori.

Infatti Dana, Hintze, Weinschenk, Rosenbusch, Lacroix riportano i valori determinati da Des Cloizeaux con luce rossa per la thomsonite di Kaaden (Boemia), dove

$$n_p = 1.497,$$
$$n_m = 1.503,$$
$$n_g = 1.525.$$

Già lo Scheit trovò valori più alti per la thomsonite di Jakuben (Boemia):

$$n_p = 1.521, \quad n_m = 1.523, \quad n_g = 1.534;$$

Digitized by Google

così pure la Riva per la thomsonite di Casarza:

$$n_p = 1.517\,, \quad n_m = 1.520\,, \quad n_g = 1.538\,,$$

e la Bellinzona per la thomsonite dei Monzoni (1).

Più recentemente ancora il Gordon (2) riprese in esame thomsoniti di varie località, conservate nell'Accademia di Storia Naturale di Filadelfia, e constatò in primo luogo che non tutti i campioni catalogati come thomsonite lo erano realmente, essendosi in alcuni casi confuso natrolite, scolecite, mesolite con la thomsonite.

Inoltre, determinati gli indici di rifrazione di varie thomsoniti, trovò che per questo minerale essi variano da un minimo (Th. di Faroë Islands) dove

$$n_p = 1.517\,, \quad n_m = 1.520\,, \quad n_g = 1.530$$

a un massimo (Th. di Kilpatrick) dove

$$n_p = 1.529\,, \quad n_m = 1.531\,, \quad n_g = 1.541.$$

Di poco superiori sono gli indici della calciothomsonite di Franklin Furnace, dove

$$n_p = 1.530\,, \quad n_m = 1.532\,, \quad n_g = 1.542.$$

La thomsonite di Viù possiede dunque indici di rifrazione che rientrano perfettamente nei limiti segnati da Gordon.

---

(1) G. Bellinzona, *Thomsonite associata a cabasite dei Monzoni*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie V, XXXII, 346. Roma, 1923.

(2) S. G. Gordon, *Optical notes on Thomsonite*, « Journ. of Min. Soc. of America », VIII, n. 7, 125, 1923.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 24 Febbraio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. G. GRASSI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Somigliana, Sacco, Pochettino, Garelli, Vallauri e Boggio in funzione di Segretario.

Scusano la loro assenza il Presidente Parona ed il Segretario Repossi.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente Grassi rivolge cordiali parole di benvenuto al nuovo Socio Prof. Vallauri, il quale risponde ringraziando vivamente per l'alto onore avuto dall'Accademia e salutando nel Grassi il suo venerato Maestro, assicurando inoltre la Classe che farà del suo meglio, compatibilmente con le sue mansioni e incarichi, per rendersi degno dell'alta distinzione avuta.

Il Presidente legge i seguenti telegrammi inviati a S. M. il Re, a S. Santità e a S. E. il Capo del Governo, in occasione della avvenuta conciliazione:

Primo Aiutante Campo Sua Maestà il Re - Roma:

Prego esprimere a Sua Maestà esultanza questa Reale Accademia Scienze per avvenuta conciliazione che assicura all'amata Italia inestimabili benefizi pace e grandezza. Ossequi.

Presidente: Parona.

Digitized by Google

Sua Eminenza Reverendissima Cardinale Segretario,
Stato Vaticano - Roma:

Nome Reale Accademia Scienze Torino prego deporre ai piedi Sua Santità espressione esultanza storico avvenimento auspicata conciliazione con augurii lungo felice Pontificato per bene Chiesa Cattolica e Patria italiana. Ossequi.

Presidente: PARONA.

Sua Eccellenza Capo Governo BENITO MUSSOLINI - Roma.

Nome Reale Accademia Scienze Torino esprimo a Vostra Eccellenza calorosi rallegramenti, ringraziamenti per grande storico avvenimento che conferma al suo altissimo Artefice la perenne riconoscenza della Patria e della Cristianità. Ossequi.

Presidente: PARONA.

La Classe accoglie con vivo plauso la lettura di tali telegrammi.

Il Presidente dà poi comunicazione dei due telegrammi di risposta finora pervenuti all'Accademia, e che sono del Generale di Bernezzo per S. M. il RE e di Sua Eminenza il Cardinale GASPARRI per S. Santità.

Il Presidente presenta poi l'omaggio pervenuto all'Accademia dell'opera di Georg MOHR: *Euclides Danicus,* Amsterdam, 1672, stampata a Copenhagen, sulla quale interloquiscono i Soci D'OVIDIO e PEANO.

Il Socio SACCO, a nome dell'autore Dr. DU RICHE PRELLER, presenta due volumi intitolati: *Italian Mountain Geology,* illustrandoli brevemente. Inoltre presenta il suo lavoro: *Schema geologico del Biellese,* estratto dal volume " Il Biellese „, e ne commenta il contenuto in poche parole.

Il Socio BOGGIO presenta per l'inserzione negli *Atti* la Nota del Prof. BURALI-FORTI: *Una prima questione di balistica esterna,* riassumendone in breve il contenuto.

Il Socio Senatore D'OVIDIO prega il Presidente di volere trasmettere, a nome della Classe, i migliori auguri e cordiali saluti al Prof. PARONA.

Digitized by Google

LETTURE

Una prima questione di balistica esterna.

Nota di C. BURALI-FORTI
presentata dal Socio nazionale residente T. Boggio.

1. Generalità e notazioni.

Studiamo il moto *assoluto* di un proiettile ridotto alla sua espressione più semplice, il *baricentro* e la *massa* (un *punto-massa*), con mezzi geometrici, diversi dagli ordinari, che permettono di vedere sotto *nuovo aspetto* la *funzione resistente*. Risolta questa *prima questione di balistica esterna* si può poi continuare lo studio (*) quando all'ipotetico proiettile punto-

(*) Mediante *vettori* ed *omografie* basandosi sui lavori che ora citiamo, nei quali, sotto forma puramente *meccanico-geometrica* (libera da coordinate), immediatamente comprensibile, vengono studiati i moti dei *corpi rigidi*, della *trottola*, ecc.

R. Marcolongo, *Sul moto di un corpo pesante intorno a un punto fisso* [" Rend. Accad. Lincei „, s. V, vol. 17, 2° sem. 1908, pp. 698-705]. — *Momenti d'inerzia ed impulso nella dinamica dei sistemi rigidi* [" Rend. Acc. Napoli „, s. III, vol. 16, a. 1910, pp. 193-202].

O. Lazzarino, *Corso di fisica matematica* (Catania, 1922). In particolare i lavori seguenti:

Interpretazione cinematica e realizzazione meccanica del problema di Sofia Kowalewski relativo al moto di un corpo rigido pesante intorno ad un punto fisso [" Rend. Acc. Napoli „, s. III, vol. 17, a. 1911].

Sull'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti [" Rend. Acc. Lincei „, s. V, vol. 28, 1° sem. 1919, pp. 325-341].

Sopra alcuni casi singolari nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti [" Rend. Acc. Lincei „, s. V, vol. 28, 2° sem. 1919].

Sul moto dei giroscopi asimmetrici pesanti nel caso in cui l'invariante principale S è costantemente nullo [" Rend. Acc. Lincei „, 2° sem. 1919].

Digitized by Google

massa, si sostituisce il proiettile avente forma di conveniente solido di rotazione.

Lo *spazio fisico*, con tutti i suoi elementi, nel quale avviene il moto del punto-massa, si intende *immerso* nello *spazio geometrico assoluto fisso* (*).

Facciamo le seguenti ipotesi. Il moto del punto-massa avviene in *presenza della terra* in un *mezzo resistente*. La resistenza si suppone *parallela* (opposta) alla *velocità geometrica* del punto-massa in ogni istante. Del moto generale della terra nello spazio si tiene conto soltanto del *moto* (uniforme) *di rotazione* intorno al suo *asse*, asse che si intende *fisso* nello *spazio geometrico* sopra indicato (**).

In tutto ciò che segue indichiamo con:

O il *centro* e r il *raggio* della terra, supposta sferica;

$\boldsymbol{u}$ il *vettore unitario costante* parallelo all'asse *fisso* della terra [cfr. sopra] e diretto da *Nord* a *Sud*;

ω la *velocità angolare* (costante) di rotazione della terra, e quindi, $\omega\boldsymbol{u}$ è il *vettore di rotazione* della terra, essendo tale rotazione diretta da *Ovest* ad *Est*;

P la *posizione assoluta*, nello *spazio geometrico fisso*, del proiettile nel tempo generico t;

(*) Non stiamo a ripetere quanto a proposito dello *spazio geometrico fisso* (concezione newtoniana), moti *assoluti* e *relativi*, si trova esposto nella Nota *Moti relativi e pendolo di Foucault* [" Rend. Ist. Lombardo ", Vol. LV, a. 1922, pp. 310-317] di C. Burali-Forti e T. Boggio, Nota che citeremo con l'abbreviazione P. F.

Avremo occasione di citare:

C. Burali-Forti e T. Boggio, *Meccanica razionale* (Collezione Lattes) con l'abbreviazione M. R.

C. Burali-Forti, *Geometria analitico-proiettiva*, 2ª ediz. (G. B. Petrini, Torino) con l'abbreviazione G. A. P.

C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analisi vettoriale generale*, 2ª ediz., Vol. I (N. Zanichelli, Bologna), con l'abbreviazione A. V. G. — *Elementi di calcolo vettoriale*, 2ª ediz. (N. Zanichelli, Bologna) con l'abbreviazione E. C. V. [Di questi E. C. V. ne è in corso di stampa la 3ª ediz.].

(**) Lo studio della *caduta di un grave*, tenuto conto della rotazione della terra, è compreso nello studio del moto del proiettile, dipendentemente dalle condizioni *iniziali*.

Digitized by Google

h la *minima distanza* di P dalla superficie della terra, di modo che si ha: $r + h = \mathrm{mod}\,(P - O)$; il vettore unitario $(P - O)/(r + h)$ ha la *direzione* della *verticale* in P e il *verso* dal *basso* all'*alto*;

m, μ, f, rispettivamente, la *massa del proiettile*, la *massa della terra*, la *costante di Gauss*;

$g = f\mu/(r + h)^2$, funzione di P, valore della *accelerazione di gravità* nel punto P;

$l = g/(r + h) = g/\mathrm{mod}\,(P - O)$, pure funzione di P; abbreviazione utile.

Le derivate rispetto al tempo, t, saranno indicate con gli apici.

2. Equazione differenziale generale del moto assoluto del proiettile.

Il proiettile può ritenersi *libero* ed in moto perchè soggetto alle forze seguenti.

1ª La *forza di gravità*, il cui vettore (*) nel punto generico P è [cfr. P. F.]

$$-\frac{mf\mu}{(r+h)^3}(P-O) = -\frac{mf\mu}{\{\mathrm{mod}\,(P-O)\}^3}(P-O) =$$

$$= -\frac{mg}{\mathrm{mod}\,(P-O)}(P-O) = -ml(P-O),$$

vettore che è diretto da P ad O, parallelamente alla *verticale* in P.

2ª La *forza resistente*, opposta, come si è detto, alla *velocità* P' e il cui *vettore* è $-m\varphi P'$, con φ *numero reale*, funzione di P, *positivo* o *nullo*. Ne segue che $m\varphi\,\mathrm{mod}\,P'$ è l'*intensità della resistenza*, cioè l'ordinaria *funzione resistente*.

(*) Molti confondono una *forza* con il *vettore della forza*, e dicono che *una forza può esser rappresentata da un vettore*. Ciò è falso perchè una *forza* è *funzione* di *due* elementi; il *vettore della forza* e il *punto di applicazione*.

Digitized by Google

3ª La *forza centripeta*, dovuta alla rotazione della terra, il cui vettore [cfr. P. F.] è

$$m\lambda\omega^2(\boldsymbol{u}\wedge)^2(P-O),$$

con λ numero reale relativo funzione di P, il cui valore assoluto non supera *uno*.

Ciò posto, e applicando il *principio di D'Alembert*, si ha l'*equazione generale differenziale* (2° ordine) *del moto assoluto del proiettile* [cfr. P. F.]

$$(1') \qquad P'' = -l(P-O) - \varphi P' + \lambda\omega^2(\boldsymbol{u}\wedge)^2(P-O),$$

ovvero, ricordando [cfr. A. V. G., o M. R.] che

$$(\boldsymbol{u}\wedge)^2 = \mathrm{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - 1,$$

$$(1) \quad P'' = -\varphi P' - (l+\lambda\omega^2)(P-O) + \lambda\omega^2.\,\boldsymbol{u}\times(P-O).\,\boldsymbol{u},$$

nelle quali forme, conviene ricordarlo, l, λ, φ sono funzioni di P e quindi anche di t.

A proposito della equazione (1'), od (1), e delle forze 1ª, 2ª, 3ª sopra considerate, giova osservare quanto segue. Se P è in moto in virtù della sola forza 1ª (gravità newtoniana, *indipendente* dalla *resistenza del mezzo* e dalla *rotazione della terra*) allora l'equazione (1') diviene $P'' = -l(P-O)$ e si ha la traiettoria nel *vuoto* con la *terra fissa*. Ma noi vogliamo tener conto, sia della *resistenza del mezzo* (o anche di altre azioni resistenti), che della *rotazione della terra*; quindi P sarà in moto in virtù, oltre che della forza 1ª, anche di un'altra forza. Questa possiamo scomporla in *due*; una parallela ed opposta alla velocità geometrica P' (la 2ª), e che è l'ORDINARIA *forza resistente*; un'altra (la 3ª) parallela alla *forza centripeta* che *agirebbe* su P *se* P *fosse invariabilmente collegato con la terra*, il cui vettore deve, necessariamente, essere il prodotto di $m\omega^2(\boldsymbol{u}\wedge)^2(P-O)$ per un coefficiente numerico λ, funzione di P e in valore assoluto minore di uno perchè P è trascinato solo parzialmente dall'atmosfera. Tale considerazione delle tre forze, atte a produrre il moto di P, è alquanto diversa dall'ordinaria, ma è fisicamente esatta.

Digitized by Google

Se P, funzione di t, descrive una *traiettoria fisica effettiva* di un proiettile punto-massa, P deve, nelle ipotesi fatte in principio, sodisfare alla (1) la quale determina, scalarmente, φ e λ. Basta moltiplicare scalarmente $(\times)$ la (1'), equivalente alla (1), separatamente per due vettori $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ per ottenere

$$\varphi . P' \times \boldsymbol{b} - \lambda\omega^2 . (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \times \boldsymbol{b} = - \{ l(P - O) + P'' \{ \times \boldsymbol{b}$$

$$\varphi . P' \times \boldsymbol{c} - \lambda\omega^2 . (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \times \boldsymbol{c} = - \{ l(P - O) + P'' \{ \times \boldsymbol{c},$$

equazioni lineari in φ e $\lambda\omega^2$ che, posto $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$, dànno subito [cfr. E. C. V. per il prodotto interno di due prodotti vettoriali]

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi . P' \wedge \{ (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \{ \times \boldsymbol{a} = \\ = - \{ l(P - O) + P'' \{ \wedge \{ (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \{ \times \boldsymbol{a} \\ \lambda\omega^2 . P' \wedge \{ (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \{ \times \boldsymbol{a} = \\ = P' \wedge \{ l(P - O) + P'' \{ \times \boldsymbol{a}, \end{cases}$$

che determinano φ e $\lambda\omega^2$, *indipendentemente da* $\boldsymbol{a}$, purchè non sia nullo, per tutti i valori di t, il prodotto misto che comparisce nei primi membri delle (2). Ora affinchè si abbia

$$P' \wedge \{ (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \{ =$$
$$= P' \times \boldsymbol{u} \wedge (P - O) . \boldsymbol{u} - P' \times \boldsymbol{u} . \boldsymbol{u} \wedge (P - O) = 0$$

per ogni t, deve essere, per ogni t,

$$P' \times \boldsymbol{u} \wedge (P - O) = 0 \quad \text{e} \quad P' \times \boldsymbol{u} = 0,$$

da cui $\quad P'' \times \boldsymbol{u} \wedge (P - O) = 0 \quad \text{e} \quad P'' \times \boldsymbol{u} = 0,$

poichè $\boldsymbol{u} \wedge (P - 0)$ e $\boldsymbol{u}$ sono vettori non paralleli (sono ortogonali); vale a dire P dovrebbe descrivere una *retta* parallela al piano dell'equatore. il che è impossibile a causa della forza 1ª che non è nulla. Il vettore $\boldsymbol{a}$ non perpendicolare a

$$P' \wedge \{ (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \{$$

può essere scelto in infiniti modi, con infinite terne di vettori

Digitized by Google

non complanari, poichè P deve descrivere, fisicamente, una linea. Dunque, eccettuato qualche caso limite che dia nullo il prodotto esterno di P' per $(\boldsymbol{u}\wedge)^2(P-O)$, le (2) determinano e in un sol modo, φ e λ essendo $\boldsymbol{a}$ vettore arbitrario, ad es. costante, che non annulli (e ne esistono infiniti) i coefficienti di φ e $\lambda\omega^2$ delle (2) (*).

Visto che φ e λ sono *determinati* dal *moto fisico effettivo* del proiettile (come, del resto, è ovvio), deve esistere una equazione differenziale in P, *non contenente esplicitamente* φ, λ *ed equivalente alla* (1) che, una volta integrata, deve dare per P una funzione tale di t da sodisfare alla (1) con i valori (2) di φ e λ. Tale equazione si ottiene subito moltiplicando $(\times)$ la (1′) per

$$P'\wedge(\boldsymbol{u}\wedge)^2(P-O)$$

e si ha:

$$(3)\qquad \{l(P-O)+P''\}\times\{P'\wedge(\boldsymbol{u}\wedge)^2(P-O)\}=0$$

che equivale alla (1′), e anche alla (1), poichè esprime che $l(P-O)+P''$ è vettore complanare con P' e $(\boldsymbol{u}\wedge)^2(P-O)$. Vale a dire dalla (3) si ricava la (1′) e una volta integrata la (3) si ottengono, per mezzo della (2), i numeri φ,λ (**).

Si noti che se non si considera il moto di rotazione della

(*) Si osservi ancora che, se in tutto il campo di variazione di t, si ha

$$(a)\qquad P'\times(P-O)\wedge\boldsymbol{u}\neq 0$$

allora moltiplicando $(\times)$ la (1) per $(P-O)\wedge\boldsymbol{u}$ si ha subito

$$(b)\qquad \varphi=-\frac{P''\times(P-O\wedge\boldsymbol{u}}{P'\times(P-O)\wedge\boldsymbol{u}}=-\frac{d}{dt}\log[P'\times(P-O)\wedge\boldsymbol{u}]$$

forma notevole di φ nella ipotesi (a).

(**) La (3) si può ottenere, con calcolo un po' lungo anche così. I valori φ, λ tratti dalle (2) si sostituiscano nella (1′); si liberi dal denominatore; si tenga conto delle due forme [cfr. E. C. V.] dello sviluppo del prodotto esterno di due prodotti esterni; si troverà che il prodotto del *numero* primo membro della (3) per $\boldsymbol{a}$ è nullo; quindi, poichè $\boldsymbol{a}$ non è nullo, ed è arbitrario, si ottiene la (3).

Digitized by Google

terra [cioè nella (1') si pone $\omega = 0$] allora in luogo della (3) si trova la

$$(3') \qquad \{ l (P - O) + P'' \{ \wedge P' = 0 ,$$

[e ciò moltiplicando esternamente ($\wedge$) la (1), con $\omega = 0$, per P']. Da (3') si ricava φ con la prima delle (2). È chiaro che se, *come si fa sempre*, si dà *a priori* φ in funzione di mod P' allora, integrata la (1), si ottiene una *traiettoria*, *dipendente* da φ, che *può non essere una traiettoria fisica* (*).

Integrata la (3) e fissate ad arbitrio le costanti iniziali, *si hanno tutte le traiettorie fisicamente possibili* (si intende sotto le ipotesi fatte in principio), *restando determinata*, dalle (2), *per ogni traiettoria, la funzione resistente* φ e la funzione λ, resistenza parziale, dovuta alla rotazione della terra.

3. Alcune considerazioni sulla determinazione sperimentale della funzione resistente.

a). Si intuisce che φ deve dipendere da P' e P'', cioè dalla *velocità* e *accelerazione* di P; il che è confermato dalle (2). Ma dalle (2) si ha φ *sotto una forma che nulla ha a che fare con le forme ordinarie della funzione resistente*, forme nelle quali, tra altro, manca l'accelerazione P''. Si rende quindi, necessario l'uso di tabelle di correzione, tabelle che hanno un valore molto relativo non potendosi valutare i limiti entro i quali sono compresi gli errori.

In modo analogo per la funzione λ; ma in ciò che segue ci limitiamo a considerare l'ordinaria funzione resistente φ mod P'.

b). Supponiamo che, ad es. con metodi cinematografici, si riesca a determinare una *successione* di punti, con i *relativi*

(*) Mentre la *Balistica interna* ha fatto notevoli progressi, dall'esame dei più recenti trattati di *Balistica esterna*, si rileva facilmente che questa non ha progredito [altro che per piccole questioni di forma] rispetto a quanto è stato fatto da F. Siacci, vero e geniale fondatore della Balistica. Ciò è dovuto in parte alla insufficiente impostazione fisica del problema e in parte all'uso di mezzi di ricerca non geometrici.

Digitized by Google

valori del tempo t, di una *traiettoria fisica effettiva ottenuta con un tiro*. Si può allora, con gli ordinari metodi di *interpolazione* (a parte la lunghezza del calcolo), determinare un punto P funzione *razionale* di t, che, col variare di t, descrive una linea che passa per i punti della *successione*, nei *tempi corrispondenti*, determinati sperimentalmente. Tale linea dà una *traiettoria approssimata* della traiettoria effettiva con grado di approssimazione che è difficile, o forse impossibile, valutare. Il punto P così ottenuto, come funzione razionale di t, deve sodisfare, almeno approssimativamente, alla equazione generale (3); calcolati P' e P'' la 1ª (2) dà la φ, ancora approssimata e con incerto grado di approssimazione.

Ciò fatto (sempre supposto che sia possibile farlo) e per *ogni tiro* e per *ogni speciale condizione fisica degli elementi che producono la resistenza*, si può ottenere un diagramma della funzione resistente $\varphi \bmod P'$. Dai vari diagrammi ottenuti, classificati secondo gli elementi del tiro, si potrà, forse, ottenere un diagramma medio che dia, approssimativamente, la legge generale della resistenza, a parte il *fatto* che le condizioni atmosferiche variano continuamente e non sono valutabili nei vari punti della traiettoria effettiva (*).

c). Restano da considerare le *esperienze di gabinetto* (**). Possono queste dare la φ? Non si deve ipotecare la scienza; ma vi è da ritenere che ciò sia ancor meno possibile che con la esperienza *b)* e per le ragioni che seguono.

Comunque si faccia l'esperienza, gli elementi P', P'', dai quali dipende φ [cfr. (2)], sono ben lontani dall'essere quelli *effettivi* del tiro, nel quale P', P'' e la resistenza *variano continua-*

(*) Il calcolo delle *probabilità*, di solito largamente usato, non può dare risultati attendibili. Le *ipotesi* della *probabilità matematica* non sono verificate nei tiri, e, quindi, *non sono applicabili* i teoremi, matematicamente esatti, della teoria matematica della probabilità.

(**) Non ci occupiamo della prima esperienza fatta da Newton nella chiesa di S. Paolo in Londra, che, del resto, dà risultati non troppo diversi da quelli che si ottengono con le moderne espressioni per la funzione resistente.

Digitized by Google

mente e le leggi di variazione, *lo si noti bene*, sono determinate dalla (3) o, per $\omega = 0$, dalla (3').

Se il proiettile è fisso e l'aria è in moto, allora manca P''; nella parte inferiore del proiettile si forma una pseudo-scia, o forse un vortice, che deve influire sul valore di φ e tale influenza non sembra valutabile.

Se il proiettile ruota e l'aria ambiente è fissa, si ha una *scia* che, in stato di *regime*, sia pure temporaneo, determina una specie di *anello di aria rarefatta* nel quale avviene il moto del proiettile e quindi φ dipende da tale rarefazione che non sembra valutabile.

4. Proiezione ortogonale della traiettoria assoluta sul piano dell'equatore.

Se Q è la proiezione ortogonale di P sul piano (dell'equatore) uscente da O e normale ad $\boldsymbol{u}$ e ricordiamo [cfr. A. V. G.] che $(\boldsymbol{u}\wedge)^2 = \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - 1$ si ha subito

$$(4) \qquad Q = P - (P - O) \times \boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} = O - (\boldsymbol{u}\wedge)^2 (P - O),$$

da cui segue immediatamente

$$(5) \qquad Q' = -(\boldsymbol{u}\wedge)^2 P', \qquad Q'' = -(\boldsymbol{u}\wedge)^2 P''.$$

Se operiamo con $(\boldsymbol{u}\wedge)^2$ nei due membri della (1) e ricordiamo [cfr. A. V. G.] che $(\boldsymbol{u}\wedge)^4 = -(\boldsymbol{u}\wedge)^2$ si ha

$$(\boldsymbol{u}\wedge)^2 P'' =$$
$$-\varphi.(\boldsymbol{u}\wedge)^2 P' - l.(\boldsymbol{u}\wedge)^2 (P - O) - \lambda\omega^2.(\boldsymbol{u}\wedge)^2 (P - O)$$

che per le (4), (5) dà subito

$$(6) \qquad Q'' = -\varphi Q' - (l + \lambda\omega^2)(Q - O) \text{ (*)}.$$

(*) Si può dedurre dalla (1) anche senza le (5); ma il calcolo è lungo ciò prova l'utilità delle *omografie*.

Digitized by Google

La (6) è l'equazione differenziale del moto di Q. Tale moto è *centrale* (centro O) con *resistenza del mezzo* [cfr. M. R.].

Se i è la *rotazione di un retto* per i vettori v normali ad u, cioè

$$\mathrm{i}\,v = v \wedge u,$$

allora dalla (6) si ha subito

$$Q' \times \mathrm{i}\,Q'' = -(l + \lambda\omega^2)\,Q' \times \mathrm{i}(Q - O)$$

da cui risulta

$$(7) \qquad (Q' \times \mathrm{i}\,Q'') / \{Q' \times \mathrm{i}(O - Q)\} = l + \lambda\omega^2$$

la quale prova [cfr. G. A. P.] che: *la traiettoria di Q volge, in generale, la concavità verso il punto O, o in verso contrario, secondo che $l + \lambda\omega^2$ è positivo o negativo*; il che dà un'idea di come è disposta la traiettoria assoluta P (*).

5. Moto relativo.

Con i metodi ordinari delle coordinate cartesiane (*due* sistemi; uno *fisso*, l'altro *mobile* (**)) si ottiene soltanto il *moto relativo* del proiettile, cioè il moto quale apparisce ad un osser-

---

(*) Sia P_1 un punto nei dintorni di P. Riferendoci allo sviluppo della superficie cilindrica descritta dalla retta PQ, in un piano parallelo ad u, si ha che: *la linea P rivolge, in P, la concavità verso u quando i punti $P_1, P + u$ si trovano dalla stessa parte del piano che passa per P ed è parallelo ai due vettori P', $P' \wedge u$.* Da questo e con un calcolo (vettoriale) semplicissimo, si ricava che

$$(P' \wedge P'') \times (P' \wedge u) \begin{cases} > 0, & \text{concavità verso } u \\ < 0, & \text{» » } -u. \end{cases}$$

Da questo si può ricavare, sia in generale [tenuto conto della (3)] che nei casi particolari accennati nel n. 6, il modo di comportarsi della concavità in P rispetto ad u.

(**) Notando che anche coloro che *non ammettono* lo *spazio geometrico fisso* parlano di elementi *fissi*!

Digitized by Google

vatore che, partecipando del moto di rotazione della terra, non si accorge di tale moto.

Per ottenere *sotto forma assoluta* anche tale *moto relativo* (non vi è contradizione di termini!) basta introdurre il *rotore* α, funzione di t, mediante il quale si eprime il moto continuo di rotazione della terra da *Ovest* ad *Est* [cfr. M. R., p. 76 e P. F.]

$$(8) \qquad \alpha = \cos\omega t + (1 - \cos\omega t)\,\mathrm{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + \operatorname{sen}\omega t\,.\,\boldsymbol{u}\wedge$$

e porre

$$(9) \qquad P_1 = O + \alpha^{-1}(P - O), \text{ da cui } P = O + \alpha(P_1 - O)$$

perchè la traiettoria di P_1 sia appunto la *traiettoria relativa* di P, cioè la traiettoria che è la *rappresentazione del moto assoluto di* P [cfr. P. F.].

Ricordando [cfr. M. R.] che

$$d\alpha/dt = \omega\,.\,\boldsymbol{u}\wedge\alpha,$$

formula semplicissima che compendia le complesse formule di Poisson e rende quindi inutili, in generale, gli elementi euleriani, dalla 2ª forma delle (9) si ricava subito

$$(10) \qquad P' = \omega\,.\,\boldsymbol{u}\wedge\alpha(P_1 - O) + \alpha P_1',$$

$$P'' = \omega^2\,.\,(\boldsymbol{u}\wedge)^2\alpha(P_1 - O) + 2\omega\,.\,\boldsymbol{u}\wedge\alpha P_1' + \alpha P_1'';$$

sostituendo questi valori nella (1), riducendo ed operando con α^{-1} si ha una equazione differenziale in P_1 che è *più complessa* della (1) (*).

(*) Sostituendo nelle (2) si ottengono per φ e λ forme assai complesse.

Se, poi, operiamo con α^{-1} nella (3), e si tien conto delle (9) e delle (10) nelle quali si sia operato con α^{-1}, si ottiene, come equazione differenziale in P_1, non contenente esplicitamente φ, λ, e corrispondente alla (3), una equazione che lascia molto a desiderare in fatto di semplicità e chiarezza.

La traduzione in coordinate cartesiane delle formule ora accennate per P e per P_1 dà delle formule complicatissime assolutamente illeggibili.

Digitized by Google

Se è realizzabile l'esperienza *b)* del n. 3, allora si ottiene una successione di punti P_1 della traiettoria *relativa*. È utile passare, mediante le (9), alla successione di punti P della traiettoria assoluta, poichè si hanno formule più semplici, come avviene tutte le volte che si evitano (e possono *sempre* evitarsi) i moti relativi [cfr. M. R. e P. F.].

6. Osservazioni.

Nel punto P di *massima altezza* deve essere

$$\{\mathrm{mod}\,(P-O)\}' = 0,$$

vale a dire $(P-O) \times P' = 0$ e quindi: *nel punto di massima altezza della traiettoria la tangente è orizzontale.*

Nel punto P di *minima velocità* deve essere

$$(P'^2)' = 0, \text{ cioè } P' \times P'' = 0$$

e quindi: *nel punto di minima velocità l'accelerazione è parallela alla normale principale.*

Dalla (3), dal n. 4 e tenuto conto dei tempi cui corrispondono i due punti sopra considerati si possono ottenere, anche senza integrare la (3), alcune leggi del moto. Lasciamo al lettore la cura di fare tali studi.

Praticamente possono esser considerati alcuni casi particolari.

Se il tiro è tale che possa farsi astrazione dal moto di rotazione della terra, cioè possa porsi $\omega = 0$, allora la (3′) diviene

$$P' \wedge P'' + l P' \wedge (P-O) = 0;$$

moltiplicando $(\times)$ questa per $P-O$ si ha

$$P' \wedge P'' \times (P-O) = 0 \text{ per ogni } t,$$

la quale prova che la retta OP giace nel piano osculatore in P, cioè [cfr. G. A. P.] *la traiettoria P sta in un piano uscente da O.*

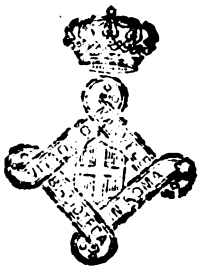
Se il proiettile non raggiunge grandi altezze, si può trascurare h/r; l'equazione (3) si semplifica e g è l'ordinaria *co-*

Digitized by Google

stante di gravità, ma, bene inteso, *indipendente dalla rotazione della terra.*

Se il tiro avviene in una regione limitata in modo tale da potersi ritenere *parallele* le *verticali* in due punti qualunque distinti, allora il vettore $(P - O)/(r + h)$ si può ritenere *costante*; è *unitario* ed ha la *direzione* della *verticale* e il *verso* dal *basso* all'alto. Anche in questo caso la (3) si semplifica. Ecc.

L'Accademico Segretario
EMILIO REPOSSI.



Digitized by Google

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

Opere scelte di Amedeo Avogadro (per cura di I. Guareschi).

Torino, Unione tipografico-editrice torinese, 1911, 1 vol. in-4° (4 csn., CXL-492 pp., 1 ritr.).

Miscellanea di studi danteschi. *Dante e il Piemonte.*

Torino, Fratelli Bocca editori, 1922, in-8° (VIII-648 pp.).

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 27 Gennaio 1929 . *Pag.* 95

Aliverti (G.). — Misure di radioattività atmosferica . . . „ 97

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 10 Febbraio 1929 . „ 104

Resegotti (Giuseppe). — Heulandite e Stilbite di Prascorsano presso Cuorgnè (Piemonte) . . . . . „ 105

Parona (C. F.). — Appunti per uno studio sulle *Spugne* del Permiano di Sicilia (Bacino del Sosio) . . . . . „ 121

Gennaro (Virginia). — Thomsonite e Scolecite dell'alta Valle di Ayas e delle Valli di Lanzo . . . . . „ 133

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 24 Febbraio 1929 . „ 144

Burali-Forti (C.). — Una prima questione di balistica esterna „ 146

Tip. Vincenzo Bona - Torino

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

BIBLIOTECA NAZIONALE VE-ROMA
16 NOV 1929
RIVISTE

VOL. LXIV, DISP. 9ª E 10ª, 1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

Digitized by Google

LETTURE

Misure pireliometriche eseguite sull'Aspromonte.

Nota di A. AMERIO, O. DE PASQUALE, V. RICCA
presentata dal Socio corrispondente A. Amerio.

PREMESSA. — Scopo della ricerca era la determinazione della costante solare, seguendo un metodo nuovo nella parte che concerne il calcolo dell'influenza che hanno il vapor d'acqua e l'anidride carbonica nell'assorbimento totale esercitato dall'atmosfera terrestre sulla radiazione che si vuole misurare.

L'importanza del metodo consiste nel fatto che l'assorbimento di questi due costituenti dell'atmosfera, che è la parte più importante dell'assorbimento totale, viene determinato in base alle osservazioni pireliometriche, alle determinazioni sperimentali di laboratorio e alle moderne conoscenze della distribuzione degli elementi costitutivi dell'atmosfera terrestre alle varie altezze.

Di questo metodo è stato fatto cenno nell'ultimo Congresso internazionale dei Fisici, tenuto a Como e a Pavia, nel 1927 (1).

Eccolo brevemente: Ammettiamo come nota la distribuzione dell'energia nello spettro solare fuori dell'atmosfera terrestre. Essa risulta dalle classiche ricerche del Langley (2) ricalcolate dal Rizzo (3), da quelle di Abbot (4) e da quelle di Amerio (5). È importante notare che fra esse c'è molto minore

(1) " Atti del Congresso internaz. di Fisica „, vol. II, 1927.
(2) " Report of the Mount Whitney expedition „.
(3) " Memorie Acc. di Torino „, 1898.
(4) ABBOT, " The Sun „.
(5) " Memorie Acc. Lincei „, 1914 e " Atti Acc. Lincei „, 1915.

Digitized by Google

disparità di quanta ne sia fra le numerose misure della costante solare eseguite nello stesso periodo.

Rappresentiamo detta distribuzione al modo consueto, cioè in assi cartesiani, prendendo per ascisse le lunghezze d'onda e per ordinate dei segmenti proporzionali alle rispettive energie, indi segnamo le regioni che corrispondono alle bande d'assorbimento dell'anidride carbonica e del vapor d'acqua, e limitiamole con tante parallele all'asse delle ordinate, comprese fra la curva e l'asse delle ascisse.

L'area totale compresa fra la curva e l'asse delle λ sia S; essa è proporzionale all'energia totale, cioè alla costante solare che indichiamo con A. Sia α l'area compresa nelle bande d'assorbimento segnate; essa è proporzionale all'energia sulla quale si esercita l'assorbimento selettivo e sia a l'area rimanente, sulla quale si esercita il solo assorbimento diffusivo. Sarà:

$$a + \alpha = S.$$

Ora vi sono varie ricerche di laboratorio, di Paschen, Fowle, Hessner ecc. che dànno i valori dei coefficienti di assorbimento del vapor acqueo e dell'anidride carbonica per le singole lunghezze d'onda, e per mezzo loro ci sarà possibile calcolare i valori dell'energia assorbita da questi costituenti dell'atmosfera, qualora si riesca a determinarne, come vedremo, le masse sovrastanti alle singole stazioni.

Tracciamo così per punti le curve che dànno la distribuzione dell'energia nell'interno delle bande per le singole stazioni. Se queste sono due, siano α_1 e α_2 le aree che, nell'insieme di dette bande, sono comprese fra le curve tracciate e l'asse delle ascisse; esse sono proporzionali alle energie delle zone di assorbimento, che oltrepassano il livello della stazione, si misurano sul diagramma e sono quindi dei dati che possiamo considerare come sperimentali.

Indichiamo con b il coefficiente d'assorbimento diffusivo corrispondente alle singole onde che sono comprese nell'area a, e c sia il coefficiente di proporzionalità tra l'area S e la costante A; siano A_1 e A_2 le intensità delle radiazioni che hanno attraver-

Digitized by Google

sati gli spessori ϵ_1 e ϵ_2; a_1 e a_2 le aree corrispondenti a dette energie, diminuite rispettivamente delle α_1 e α_2.

Sarà:

$$A = cS,$$

$$A_1 = c\,(a_1 + \alpha_1),$$

$$A_2 = c\,(a_2 + \alpha_2),$$

$$a_1 = \int E_\lambda\, e^{-b_\lambda \epsilon_1}\, d\lambda,$$

$$a_2 = \int E_\lambda\, e^{-b_\lambda \epsilon_2}\, d\lambda,$$

dove gli integrali si intendono estesi alle onde per le quali si esercita il solo assorbimento diffusivo ed E_λ è l'ordinata spettante all'onda λ.

In questo sistema si conoscono:

$$S,\ A_1,\ A_2,\quad \alpha_1, \alpha_2,\quad \epsilon_1, \epsilon_2 \quad \text{e le } E_\lambda;$$

e sono incognite:

$$A, c,\ a_1, a_2,\quad \text{e le } b_\lambda.$$

Se il sistema si semplifica introducendo per approssimazione un coefficiente medio d'assorbimento b, le due ultime equazioni diventano:

$$a_1 = a\, e^{-b\epsilon_1},$$

$$a_2 = a\, e^{-b\epsilon_2},$$

le quali, colle prime tre del sistema ci permettono di calcolare le quantità incognite e quindi la costante solare A.

In questi calcoli si trascura la perdita per diffusione che avviene entro alle bande di assorbimento, negli strati superiori a quelli nei quali si trovano il vapor d'acqua e l'anidride carbonica, vale a dire nell'altosfera. Questa correzione si potrà fare in un secondo tempo, ma la quantità che si trascura è piccola, perchè l'assorbimento selettivo si manifesta per onde superiori a 0,72 μ., per le quali è piccolo il coefficiente di assorbimento diffusivo che si trascura.

Digitized by Google

Le quantità di vapor acqueo e di anidride carbonica che prendono parte all'assorbimento si possono calcolare se si ammette di aver a che fare con una distribuzione normale.

Infatti si sa che l'anidride carbonica non giunge oltre alla troposfera e si conosce il valore della pressione che essa esercita alle varie quote. Per conseguenza è molto facile calcolare quale sia il suo spessore, ridotto alle condizioni normali, sovrastante alle varie quote. Si trova così che esso è di m. 2,45 sul livello del mare; 2,01 sui 1000 m. di altezza; 1,70 sui 2000; 1,45 sui 3000 e 1,12 sui 4559, cioè al disopra della Capanna Regina Margherita del Monte Rosa.

Per il vapor d'acqua, la cosa è alquanto più complicata per via della grande variabilità di questo costituente, e la distribuzione teorica non può darci che dei valori medi, applicabili solamente quando si abbia a disposizione un gran numero di osservazioni.

La distribuzione teorica, o media, si trova nel trattato dell'Humphrey (1) ed è stata pure studiata da Khanewsky (2); essa è espressa da una curva che dà le pressioni alle varie altezze, avendo preso per unità la pressione al livello del mare. Da essa si può quindi dedurre quale sia il valore della tensione a un'altezza data, purchè sia nota la tensione al livello del mare, e in conseguenza dedurre quali siano le masse di vapor d'acqua presenti nell'atmosfera.

Si trova così, ad esempio, che in una distribuzione normale, se al livello del mare lo stato igrometrico è 0,5 e la temperatura è di 30°, sul livello del mare vi sono 44,2 m. di spessore di vapor acqueo ridotto alle condizioni normali; 26,6 sui 1000 m.; 15,2 sui 2000; 9,0 sui 3000; 4,2 sulla Capanna Regina Margherita del M. Rosa.

Per far fronte all'inconveniente della grande variabilità del vapor acqueo, che non solo influisce sulla quantità totale del vapore, ma anche sulla sua distribuzione alle varie altezze,

---

(1) *Physic of the Air.*

(2) " Journ. de Phys. „ 1927.

Digitized by Google

mentre si richiedono molte determinazioni, sono utilissime le stazioni intermedie, le quali, di volta in volta permettono di determinare gli scostamenti dalla distribuzione normale.

Determinate così le masse assorbenti, si fanno i calcoli degli assorbimenti esercitati, necessari per calcolare le α_1 e α_2.

Dobbiamo però dire che il metodo accennato non è stato impiegato nella parte che pubblichiamo ora di questo lavoro, perchè in causa della poca entità dei dislivelli delle stazioni di osservazione, non si avevano sufficienti elementi a disposizione, e d'altra parte nuove esperienze sono state iniziate quest'anno in condizioni migliori sul Monte Rosa. Pertanto i calcoli finali sui dati ottenuti nelle ricerche che qui riferiamo, sono stati fatti coi soliti metodi.

Scelta dell'Aspromonte. — La scelta dell'Aspromonte come luogo adatto per l'impianto delle stazioni è stata fatta per la vicinanza all'Istituto di partenza (Istituto di Fisica della R. Università di Messina), l'accessibilità, il facile soggiorno in rapporto al clima, nonchè per la limpidezza del cielo che qualche volta ne ha consentito una precisione veramente notevole, come si può notare nelle serie più avanti stampate.

In progetto le misure avrebbero dovuto aver luogo in tre stazioni: Monte Calabro (400 m. ca), Polsi (900 m. ca), Montalto (1958 m.); eccetto però che nel primo anno [1], poterono funzionare solo le due stazioni più elevate. La stazione di Polsi era situata in una stanza del Santuario omonimo, la stazione di Montalto in una baracchetta appositamente costruita sulla vetta.

Necessità di una grande precisione nei risultati sperimentali. — È opinione diffusa che una grande esattezza nella misura della radiazione solare, nelle diverse stazioni, non sia indispen-

---

[1] La stazione di Monte Calabro, affidata al compianto dott. A. Occhiuto, diede risultati trascurabili, sia perchè gli apparecchi vi giunsero guasti, sia per le condizioni di salute già poco buone dell'osservatore, al quale mandiamo un mesto saluto affettuoso.

Digitized by Google

sabile per il fatto che tale precisione viene poi a mancare nel risultato finale, in causa dell'incertezza con la quale si determina l'assorbimento atmosferico. Si dimostra invece agevolmente quanto sia conveniente una grande precisione nei dati sperimentali, per diminuire l'errore che si commette nel calcolo dell'assorbimento.

Detto β il coefficiente medio di assorbimento atmosferico, si ha approssimativamente

$$(1) \qquad \begin{cases} A_1 = A\, e^{-\beta\varepsilon_1} \\ A_2 = A\, e^{-\beta\varepsilon_2}, \end{cases}$$

da cui

$$(2) \qquad \frac{dA}{A} = \frac{dA_1}{A_1} + \epsilon_1\, d\beta = \frac{dA_2}{A_2} + \epsilon_2\, d\beta,$$

da cui:

$$(3) \qquad d\beta = \frac{\dfrac{dA_1}{A_1} - \dfrac{dA_2}{A_2}}{\epsilon_2 - \epsilon_1}$$

e quindi:

$$\frac{dA}{A} = \frac{\epsilon_2 \dfrac{dA_1}{A_1} - \epsilon_1 \dfrac{dA_2}{A_2}}{\epsilon_2 - \epsilon_1};$$

poichè nel calcolo dell'errore relativo massimo si ammette che gli errori si sommino e che siano uguali gli errori di osservazione, si potrà scrivere:

$$(4) \qquad \frac{dA}{A} = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \frac{dA_1}{A_1}.$$

Questa relazione, anche ammesso che sia solo approssimata, perchè tali sono le (1), ci dice che *l'errore che si commette nella misura di* A *dipende da quello che si commette nella misura di* A_1 (*o* A_2) *e dalla scelta delle stazioni.* Infatti considerando le stazioni di Montalto e di Polsi, per le quali si ha $\epsilon_1 = 608$, $\epsilon_2 = 691$ (in mm. di pressione), si ottiene:

$$\frac{dA}{A} = 15{,}7 \frac{dA_1}{A_1},$$

Digitized by Google

ossia: l'errore con cui si viene a determinare A è 16 volte circa quello che si commette nella misura di A_1 e di A_2.

Nel caso del Monte Rosa, per due stazioni poste l'una alla Capanna Regina Margherita, $\epsilon_1 = 430$, l'altra ad Alagna, $\epsilon_2 = 660$, si avrebbe:

$$\frac{dA}{A} = 4{,}7 \frac{dA_1}{A_1};$$

si otterrebbe cioè un errore circa un terzo del precedente.

Con un errore sperimentale del 2 %, che è quello che in generale si commette con buoni pireliometri, si arriverebbe così ad un errore del 30 % a Montalto e del 10 % al Monte Rosa.

Dalla (2) si ricava che la parte prevalente di questo errore è dovuta all'incertezza con la quale si determina il coefficiente d'assorbimento β, e poichè questo coefficente viene dedotto in funzione di A_1 e di A_2, possiamo rilevare quale influenza l'errore commesso nella determinazione di esso importa nel calcolo di A. Il termine $\epsilon_1 d\beta$ della (2), tenuto conto della (3), si può scrivere:

$$\epsilon_1 d\beta = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \frac{dA_1}{A_1}. \tag{5}$$

Da cui si vede che quest'errore è proporzionale all'errore sperimentale, allo spessore atmosferico corrispondente alla stazione più elevata e inversamente proporzionale allo spessore atmosferico compreso fra le due stazioni. Applicando la (5) ai due casi precedenti si ha:

Per Montalto - Polsi:

$$\epsilon_1 d\beta = 14{,}7 \frac{dA_1}{A_1};$$

Per Cap. Regina Margherita - Alagna:

$$\epsilon_1 d\beta = 3{,}7 \frac{dA_1}{A_1}.$$

Sebbene le formule dell'assorbimento totale dell'atmosfera siano più complicate di quella dianzi adoperata, le considerazioni fatte sono sufficienti per indicarci la necessità di ridurre gli errori sperimentali al minimo.

Digitized by Google

Misura della Radiazione.

Scelta degli apparecchi. — Fra i vari strumenti misuratori della radiazione quelli che dànno maggiore garanzia per la sicurezza dei risultati, sono indubbiamente i pireliometri di Ångström e di Amerio (1), basati in parte sullo stesso principio. Fra i due però abbiamo creduto di dare la preferenza al secondo, anzitutto perchè è integrale, cioè assorbe tutte le radiazioni, inoltre per il fatto che esso richiede, per ogni determinazione, un tempo molto più piccolo di quello che esige l'Ångström; infatti mentre per l'Amerio questo tempo si può ridurre a quello necessario perchè la laminetta annerita raggiunga il regime nella temperatura e il galvanometro la sua massima elongazione, cioè a pochi secondi, per l'Ångström occorre ancora il tempo necessario per regolare l'intensità della corrente nella seconda laminetta, fino ad annullare nel galvanometro ogni deviazione. Tanto più che con l'Ångström una determinazione può dirsi completa quando si sia ripetuta l'operazione invertendo le laminette. Con ciò, mentre la misura con l'Amerio si fa in pochi secondi, con l'altro occorrono almeno un paio di minuti.

La rapidità con cui vengono effettuate le misure ha una grande importanza, specialmente quando si vogliano eseguire delle serie per farne poi la media, perchè è evidente che questa non si possa fare tra misure fra le quali intercorrono lunghi intervalli di tempo.

Durante questa campagna si facevano normalmente delle serie di 12 letture in 8 minuti primi complessivamente.

Oltre all'accennata ragione l'Amerio ci sembrò preferibile perchè, essendo in esso la laminetta sensibile molto accuratamente protetta dalle folate di vento, ogni misura, oltre ad essere più rapida, risulta più esatta, e, poichè di queste misure se ne possono fare molte in poco tempo, e perciò se ne può fare la media, si aumenta di molto l'esattezza.

---

(1) A. Amerio, "Rend. Acc. Lincei", 1918.

Digitized by Google

Essa infatti è già rilevante per ogni misura, come si vede dalle tabelle 11-14.

Da alcune risulta che le differenze tra le misure di una serie prossima al mezzodì sono di pochi millesimi, mentre quelle delle serie discoste dal culminare del Sole, fanno vedere la variazione graduale della radiazione che si manifesta già nella loro breve durata (8 minuti).

I galvanometri adoperati durante il primo anno risultarono poco adatti per tali specie di misure; negli anni successivi si usarono invece dei galvanometri Siemens a periodo molto corto, (con che si aveva una grande prontezza) e a grande sensibilità (circa $.6.10^{-9}$ A. per mm. di deviazione alla distanza di un metro).

Disposizione sperimentale.

Il dispositivo adottato è quello della Fig. 1, dove i numeri 1 e 2 indicano i morsetti che fanno capo alla pinza termoelettrica saldata alla laminetta del pireliometro, i numeri 3 e 4 quelli che fanno capo ai conduttori saldati alla laminetta e che permettono di riscaldarla per effetto Joule.

P = Pireliometro.

G = Galvanometro.

R_1 = Resistenza critica, necessaria per rendere giustamente aperiodico il galvanometro.

I = Invertitore di corrente.

A = Amperometro di precisione.

R_2 = Reostato.

B = Batteria di pile.

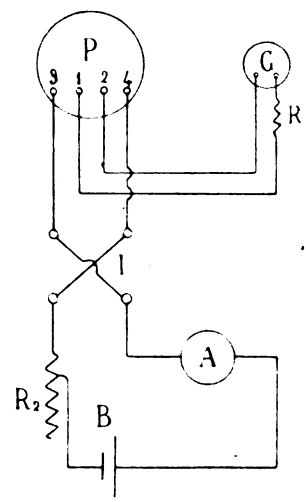


Fig. 1.

Per eseguire con questo dispositivo la misura della inten-

Digitized by Google

sità della radiazione si opera nel seguente modo: si orienta l'apparecchio in modo che la laminetta sensibile risulti normale ai raggi, ciò che si può fare servendoci dell'apposito mirino, indi si scopre la finestra del pireliometro e si legge la deviazione del galvanometro, si ricopre la finestra, e si prende così la posizione di riposo del galvanometro. Si ripete questo una dozzina di volte. Dopo si manda nella laminetta una corrente elettrica tale che la riscaldi al punto da produrre una deviazione uguale alla precedente; si inverte il senso della corrente e si ripete la misura. Se le due intensità di corrente non sono uguali, se ne prende la media. (Effettivamente tutta questa seconda parte può essere eliminata con la taratura). Pertanto detta Q la quantità di calore ricevuta dalla laminetta colpita dalla radiazione solare, Q sarà anche la quantità di calore prodotta in essa per effetto Joule, e si avrà:

$$Q = 0{,}239\, i^2 rt\,, \qquad t = 60 \text{ secondi}$$

e la quantità di calore A_1 irradiata sull'unità di superfice sarà quindi

$$A_1 = \frac{Q}{s} = \frac{0.239\, rt}{s}\, i^2,$$

essendo s la superficie della laminetta.

Il valore della frazione $\frac{0.239\, rt}{s}$ essendo costante, si può scrivere:

$$A_1 = \frac{Q}{s} = C \cdot i^2.$$

C è la costante dell'apparecchio e viene calcolata una volta per tutte in base alla conoscenza di s ed r.

Confronto degli strumenti. — Gli errori commessi nella determinazione della costante strumentale C influiscono evidentemente sui valori ricavati per A. Pertanto abbiamo proceduto al confronto dei vari pireliometri, montando i circuiti secondo lo schema della Fig. 1, ed esponendo simultaneamente i pireliometri alla radiazione solare. Avendo così ottenuto valori assai poco differenti abbiamo modificato la costante di due di essi, ritenendo

Digitized by Google

esatta quella di uno dei pireliometri, che era più grande degli altri e costruito di recente con cura particolare. Evidentemente dopo tale riduzione i valori ottenuti coi diversi apparecchi risultavano uguali.

Analoga operazione di confronto e controllo venne eseguita sugli amperometri.

Qualche cenno intorno alle stazioni. — Come è stato detto in principio, le stazioni avrebbero dovuto essere tre: Monte Calabro, Polsi e Montalto; la prima che non potè funzionare negli anni successivi, sopratutto per mancanza di mezzi finanziari, nel primo anno era stata situata in una casetta di campagna in una stanza ben esposta al sole.

Quella di Polsi (900 m. ca. sul livello del mare) il 1° anno era situata in una vasta stanza, dello stesso Santuario, fornita di una finestra esposta a Sud; gli anni successivi in un'altra molto più adatta, pure fornita di una finestra a Sud, sul cui davanzale era stata fissata una mensola sporgente in fuori, per esporre il pireliometro al sole. Il galvanometro e gli altri apparecchi erano distribuiti in modo che una persona potesse essere in grado di eseguire le misure anche da sola. La stazione era inoltre fornita di barometro, igrometro e termometro (apparecchi che erano stati confrontati in laboratorio con quelli della stazione di Montalto prima della partenza).

Nella stazione di Montalto (1958 m. sul livello del mare) durante il primo anno le misure venivano eseguite all'aperto, montando il galvanometro e il cannocchiale su apposita panchetta, mentre il pireliometro veniva posto su un muro a secco laterale. Ogni giorno bisognava perciò portarsi da Polsi a Montalto (1100 m. di dislivello), salendo la mattina per scendere la sera a misure ultimate. Le osservazioni eseguite in queste condizioni non furono molto buone e perciò le abbiamo completamente abbandonate, avendo ottenuto nei successivi anni risultati molto migliori. Il secondo anno si potè costruire una baracchetta, costituita di una stanza di circa m. 3×4, posta immediatamente a ridosso della vetta sul versante Sud, in modo che risultasse riparata dai venti dominanti. Nella parete che

Digitized by Google

guardava verso S. E. era praticata una finestra munita di mensola sporgente in fuori, sulla quale si poneva il pireliometro; il resto degli apparecchi era situato nell'interno in modo definitivo. Questa baracchetta presentava l'inconveniente di essere sensibile sopratutto ai movimenti degli operatori che, provocando dei tremiti, turbavano la posizione del galvanometro. Questo fatto rendeva necessario di operare con molti riguardi e di ripetere di tanto in tanto la taratura, per assicurarsi che qualche causa non avesse provocato un lieve squilibrio nel galvanometro. Anche questa stazione era fornita di barometro, igrometro e termometro; nel terzo anno inoltre si aggiunsero un barografo, un igrografo e un termografo. In seguito alla costruzione della baracchetta, in essa stavano normalmente due di noi che vi pernottavano e così le misure divennero agevoli.

Esecuzione delle misure. — Le osservazioni venivano iniziate contemporaneamente nelle stazioni alle ore $8,56^m$ t. m. E. C. del mattino e continuate fino alle ore $15,4^m$ con una serie di 12 misure ogni mezz'ora.

Ogni serie durava circa 8 minuti, e veniva iniziata 4 minuti prima dell'ora fissata per essere terminata 4 minuti dopo, così che la media si poteva far corrispondere all'ora o alla mezz'ora esatta. Con le medie si venivano ad avere due valori della radiazione per la stessa ora alle due stazioni. Fra una misura e l'altra passavano alcuni secondi, durante i quali si registravano le letture e si ritoccava l'orientazione dell'apparecchio. Durante le misure fatte a Montalto, un operatore stava all'apparecchio e uno al galvanometro. Spesso negli intervalli fra una serie e l'altra (circa 20 minuti) si eseguiva la taratura, seguendo il metodo esposto nella nota citata a pag. 7, riducendo in tale maniera la determinazione della radiazione solare alla sola lettura galvanometrica.

Ecco i risultati ottenuti espressi in piccole calorie per $cm.^2$ e minuto primo, notando che sono state presentate le giornate migliori:

Digitized by Google

TABELLA I. 11 agosto 1921

Ora t. m. E. e.	Stazione Montalto (Amerio - Valenti) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	608,2	70	—		691,3	63	1,30		—
9 30	—	—	—		—	58	1,32		—
10 00	—	—	1,45		—	—	1,33		0,083
10 30	—	—	1,45		—	—	1,33		0,083
11 00	—	—	1,45		—	—	1,33		0,083
11 30	—	—	1,45		—	—	1,31		0,097
12 00	—	—	1,46		690,0	56	1,30		0,110
12 30	—	—	1,45		—	—	1,27	nuvole intorno al sole	0,126
13 00	—	—	1,38		—	—	1,26	»	0,087
13 30	—	—	—	nuvole	—	—	1,23	»	—
14 00	—	—	—		—	—	1,17	»	—
14 30	—	—	—		—	—	1,16	»	—
15 00	—	—	—		689,3	60	1,13	»	—

(De Pasquale) 12 agosto 1921 (Amerio - Valenti)

9 00	604,6	63	1,57		687,0	50	1,35		0,140
9 30	—	—	1,46		—	—	1,42		0,027
10 00	—	—	1,46		—	—	1,45		—
10 30	—	—	1,45		—	—	1,43		—
11 00	—	—	1,45		—	—	1,41		—
11 30	—	—	1,46		—	—	1,44		—
12 00	—	—	1,46		—	43	1,43		0,21
12 30	—	—	1,49	poco sicura	—	—	1,42		0,47
13 00	—	—	1,51		—	—	1,39		0,080
13 30	—	—	1,50		689,0	—	1,38		0,080
14 00	—	—	1,50		—	35	1,39		0,074
14 30	—	—	1,47		—	—	1,32		0,102
15 00	—	—	1,44		688,0	—	1,32		0,83

Digitized by Google

TABELLA II. 28 luglio 1922

Ora t. m. E. e.	Stazione Montalto (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. caloria	L'igrometro non funziona	mm.	%	p. caloria		
9 00	605,2	68	1,465		688,0	58	1,217		0,169
9 30	—	—	1,438		—	—	1,221		0,151
10 00	—	—	1,440		—	—	1,187	Dalle 10 in poi nuvole	0,173
10 30	—	—	1,457		—	—	1,293	ma generalmente lontane dal sole	0,113
11 00	—	—	1,497		—	—	1,225		0,182
11 30	—	—	1,495		—	—	1,241		0,170
12 00	—	—	1,535		—	55	1,271		0,172
12 30	—	—	1,474		—	—	1,249		0,153
13 00	—	—	1,475		—	—	1,240		0,160
13 30	—	—	1,470		—	—	1,235		0,160
14 00	—	—	1,480		—	—	1,210		0,182
14 30	—	—	1,503		—	—	1,231		0,181
15 00	—	—	1,471		—	62	1,246		0,153
	(Amerio - Ricca)			31 luglio 1922	(De Pasquale - Borrello)				
9 00	610,0	62	1,520		693,0	54	1,258		0,172
9 30	—	—	1,525		—	—	1,262		0,175
10 00	—	—	1,530		—	—	1,264		0,175
10 30	—	—	1,540		—	—	1,264		0,180
11 00	—	—	1,536		—	—	1,285		0,177
11 30	—	—	1,525		—	—	1,264		0,158
12 00	—	—	1,546		—	52	1,245		0,182
12 30	—	—	1,540		—	—	1,235		0,192
13 00	—	—	? 1,685		—	—	1,270		0,267
13 30	—	—	1,530		—	—	1,245		0,170
14 00	—	—	1,520		—	—	1,232		0,181
14 30	—	—	1,490		—	—	1,250		0,173
15 00	—	—	1,500		693,0	42	1,217		0,167

Digitized by Google

TABELLA III. 1° agosto 1922

Ora t. m. E. e.	Stazione Montalto (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	610,4	62?	1,564		693,0	50	1,217	Cielo generalmente sereno	0,221
9 30	—	—	1,560		—	—	1,230		0,211
10 00	—	—	1,580		—	—	1,260	„	0,202
10 30	—	—	1,585		—	—	1,265	„	0,201
11 00	—	—	1,600		—	—	1,266	„	0,209
11 30	—	—	1,560		—	—	1,285	„	0,176
12 00	—	—	1,595		—	51	1,305	„	0,182
12 30	—	—	1,570		—	—	1,300	„	0,172
13 00	—	—	1,550		—	—	1,325	„	0,145
13 30	—	—	1,525		—	—	1,288	„	0,155
14 00	—	—	1,520		—	—	1,255	„	0,174
14 30	—	—	1,530		—	—	1,222	„	0,201
15 00	—	—	1,500		—	51	1,247	„	0,169
	(Amerio - Ricca)				2 agosto 1922			(De Pasquale - Borrello)	
9 00	608,5	68	1,550		691,5	54	1,180		0,238
9 30	—	—	1,570		—	—	1,202		0,234
10 00	—	—	1,573		—	—	1,252		0,205
10 30	—	—	1,598		—	—	1,300		0,187
11 00	—	—	1,625		—	—	1,305		0,197
11 30	—	—	1,603		—	—	1,310		0,183
12 00	—	—	1,600		—	48	1,300		0,187
12 30	—	—	1,603		—	—	1,322		0,176
13 00	—	—	1,586		—	—	1,349		0,149
13 30	—	—	1,537		—	—	1,323		0,139
14 00	—	—	1,565		—	—	1,292		0,174
14 30	—	—	1,560		—	—	1,262		0,192
15 00	—	—	1,505		691,0	48	1,222		0,188

Digitized by Google

TABELLA IV. 3 agosto 1922

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	608,5	56?	1,470		691,0	42	1,202		0,182
9 30	—	—	1,480		—	—	1,226		1,172
10 00	—	—	1,514		—	—	1,234		0,185
10 30	—	—	1,525		—	—	1,244		0,184
11 00	—	—	1,544		—	—	1,267		0,179
11 30	—	—	1,552		—	—	1,280		0,176
12 00	—	—	1,580		691,0	49	1,286		0,186
12 30	—	—	1,590		—	—	1,284		0,193
13 00	—	—	1,610		—	—	1,320		0,180
13 30	—	—	1,585		—	—	1,310		0.174
14 00	—	—	1,510		—	—	1,260		0.166
14 30	—	—	1,480		—	—	1,225		0,175
15 00	—	—	1,440		692,0	49	1,192		0,172
	(Amerio - Ricca)			4 agosto 1922	(De Pasquale - Borrello)				
9 00	609,8	58?	1,515		692,5	47	1,220		0,195
9 30	—	—	1,500		—	—	1,242		0,172
10 00	—	—	1,504		—	—	1,252		0,168
10 30	—	—	1,530		—	—	1,275		0,167
11 00	—	—	1,530		—	—	1,272		0,169
11 30	—	—	1,516		—	—	1,225		0,192
12 00	—	—	1,536		—	46	1,277		0,169
12 30	—	—	1,532		—	—	1,271		0,170
13 00	—	—	—	Cielo coperto	—	—	1,264		—
13 30	—	—	—	»	—	—	1,217		—
14 00	—	—	—	»	—	—	—	Il sole è coperto da nubi	—
14 30	—	—	—	»	—	—	—	»	—
15 00	—	—	1,530		—	—	—		—

Digitized by Google

TABELLA V. 5 agosto 1922

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1-A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	—	—	—		693,0	26	1,330		—
9 30	609,0	30	1,460		—	—	1,350		0,076
10 00	—	—	1,503		—	—	1,330		0,113
10 30	—	—	1,525		—	—	1,330		0,128
11 00	—	—	1,505		—	—	1,320		0,123
11 30	—	—	1,493		—	—	1,310		0,123
12 00	—	—	1,462		—	—	1,294		0,115
12 30	—	—	1,435		—	—	1,291		0,101
13 00	604,0	—	1,428		—	—	1,278		0,105
13 30	—	—	1,426		—	—	1,276		0,105
14 00	—	—	1,430		686,0	—	1,259		0,120
14 30	603,0	—	1,425		—	—	1,240		0,130
15 00	—	—	1,423		—	—	1,224		0,140
	(De Pasquale - Borrello)		7 agosto 1922		(Amerio - Ricca)				
9 00	—	52	—	Trovato il galvanometro spostato	692,5	47	1.256		—
9 30	—	—	—	»	—	—	1,276		—
10 00	—	—	—	L'igrometro non funziona	—	—	1,290		—
10 30	608,0	—	1,507		—	—	1,294		0,142
11 00	—	—	1,495		—	—	1,295		0,134
11 30	—	—	1,512		—	—	1,306		0,136
12 00	—	—	1,538		—	—	1,304		0,152
12 30	—	—	1,637		—	—	1,313		0,197
13 00	—	—	1,632		—	—	1,290		0,209
13 30	—	—	1,485		—	—	1,273		0,143
14 00	605,0	—	1,435		—	—	1,245		0,131
14 30	—	—	1,400		—	—	1,218		0,130
15 00	—	—	1,380		—	—	1,180		0,145

Digitized by Google

TABELLA VI. 8 agosto 1922

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1-A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	606,0	46	1,402	Cielo sereno, foschia in basso sul mare e nelle valli	695,0	38	1,150	Sereno	0,180
9 30	—	—	1,444		—	—	1,180		0,183
10 00	—	—	1,430		—	—	1,198		0,163
10 30	—	—	1,435		—	—	1,215		0,154
11 00	—	—	1,487		—	—	1,245		0,163
11 30	—	—	1,481		—	—	1,270		0,143
12 00	—	—	1,500		—	—	1,275		0,150
12 30	—	—	1,471		—	—	1,272		0,136
13 00	—	—	1,445		—	—	1,240		0,142
13 30	—	—	1,466		—	—	1,180		0,195
14 00	—	—	1,461		—	—	1,190		0,185
14 30	—	—	1,430		—	—	1,190		0,168
15 00	606,0	—	1,410		—	—	1,175		0,167
	(De Pasquale - Borrello)			9 agosto 1922				(Amerio - Ricca)	
9 00	606,0	40	1,478	Sereno	694,6	33	1,216	Sereno	0,177
9 30	—	—	1,485		—	—	1,241		0,154
10 00	—	—	1,405		—	—	1,250		0,106
10 30	—	—	1,435		—	—	1,251		0,129
11 00	—	—	1,445		—	—	1,260		0,128
11 30	—	—	1,418		—	—	1,260		0,112
12 00	—	—	1,405		—	—	1,289		0,083
12 30	—	—	1,410		—	—	1,277		0,094
13 00	—	—	1,420		—	—	1,266		0,108
13 30	—	—	1,390		—	—	1,227		0,110
14 00	—	—	1,302		—	—	1,134		0,129
14 30	—	—	1,300		—	—	1,146		0,119
15 00	606,0	—	1,480?		—	—	1,140		0,230

Digitized by Google

TABELLA VII. 10 agosto 1922

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	606,0	39	1,394	Cielo sereno	694,0	32	1,171		0,160
9 30	—	—	1,397		—	—	1,201		0,140
10 00	—	—	1,393		—	—	1,220		0,124
10 30	—	—	1,409		—	—	1,235		0,124
11 00	—	—	1,440		—	—	1,250		0,132
11 30	—	—	1,425		—	—	1,260		0,116
12 00	—	—	1,465	Qualche nuvoletta verso Sud in aumento	—	—	1,275		0,130
12 30	—	—	1,425		—	—	1,280		0,102
13 00	—	—	1,424		—	—	1,265		0,112
13 30	—	—	1,435		—	—	1,246		0,132
14 00	—	—	1,424		—	—	1,208		0,152
14 30	—	—	1,360		—	—	1,149		0,155
15 00	—	—	1,327		—	—	1,085		0,182

(De Pasquale - Borrello) 11 agosto 1922 (Amerio - Ricca)

9 00	606,5	40	—		694,5	32	—	Cielo coperto	—
9 30	—	—	—	Fino a mezzogiorno il cielo è stato nuvoloso ed il sole coperto	—	—	—	»	—
10 00	—	—	—		—	—	—	»	—
10 30	—	—	—		—	—	—	»	—
11 00	—	—	—		—	—	—	»	—
11 30	—	—	—		—	—	—	»	—
12 00	—	—	1,390	Il sole è libero da nubi	—	—	1,140		0,180
12 30	—	—	1,388		—	—	1,148		0,178
13 00	—	—	1,365		—	—	1,153		0,155
13 30	—	—	1,350		—	—	1,136		0,158
14 00	—	—	1,327		—	—	1,100		0,171
14 30	—	—	1,305		—	—	1,076		0,175
15 00	606,5	—	1,292		—	—	1,040		0,195

Digitized by Google

TABELLA VIII. 12 agosto 1922

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1-A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	605,0	40	1,222		693,5	35	0,952		0,221
9 30	—	—	1,235		—	—	1,010		0,190
10 00	—	—	1,292		—	—	1,016		0,215
10 30	—	—	1,250		—	—	1,005		0,196
11 00	—	—	1,290		—	—	1,030		0,202
11 30	—	—	1,315		—	—	1,049		0,203
12 00	—	—	1,350		—	—	1,114		0,175
12 30	—	—	1,322		—	—	1,110		0,160
13 00	604,0	—	1,310	Nuvole intorno al sole	—	—	1,103		0,158
13 30	—	—	1,254	»	—	—	1,043		0,169
14 00	—	—	1,290	»	—	—	1,057		0,180
14 30	—	—	1,275	»	—	—	1,010		0,208
15 00	—	—	1,160	»	—	—	0,937		0,192

	(Amerio - Ricca)			11 agosto 1923			(De Pasquale)	
9 00	609,7	35	1,357	693,8	29	1,234		0,097
9 30	—	—	1,390	—	—	1,237		0,110
10 00	—	—	1,420	—	27	1,265		0,109
10 30	—	—	1,430	—	—	1,292		0,097
11 00	—	—	1,453	—	31	1,313		0,097
11 30	—	—	1,480	693,5	—	1,320		0,113
12 00	—	—	1,471	—	—	1,324		0,100
12 30	—	—	1,479	—	26	1,330		0,101
13 00	—	—	1,480	—	—	1,320		0,108
13 30	—	—	1,485	693,0	—	1,315		0,114
14 00	—	—	1,482	—	—	1,273		0,141
14 30	—	—	1,470	—	—	1,255		0,153
15 00	609,7	—	1,452	692,7	32	1,217		0,162

Digitized by Google

TABELLA IX. 13 agosto 1923

Ora t.m.E.c.	Stazione Montalto (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	608,3	40	1,420		691,8	38	1,240		0,127
9 30	—	—	1,430		—	—	1,275		0,108
10 00	—	—	1,435		—	—	1,303		0,092
10 30	—	—	1,410		—	35	1,286		0,088
11 00	—	—	1,363		692,0	—	1,276		0,064
11 30	—	—	1,365		—	—	1,290		0,055
12 00	—	—	1,352		—	28	1,306		0,035
12 30	—	—	1,348		—	—	1,270		0,058
13 00	—	—	1,340		—	—	1,282	Nuvole intorno al sole	0,043
13 30	—	—	1,320		—	—	1,275		0,034
14 00	—	—	1,345		—	36	1,247		0,073
14 30	—	—	1,321		—	—	1,225		0,073
15 00	—	—	1,320		691,9	33	1,230		0,068
	(Amerio - Ricca)			15 agosto 1923			(De Pasquale)		
9 00	608,8	45	—		692,3	47	1,197	Cielo sereno	—
9 30	—	—	1,340		—	—	1,265		0,056
10 00	—	38	1,410		—	—	1,300		0,078
10 30	—	—	1,430		—	45	1,327		0,072
11 00	—	—	1,430		—	—	1,342	Comincia qualche nuvola	0,062
11 30	—	—	1,465		—	—	1,295		0,116
12 00	—	47	1,465		692,2	31	1,265		0,137
12 30	—	—	1,460		—	—	1,250		0,144
13 00	—	—	1,460		—	33	1,253		0,142
13 30	—	53	—	Le nuvole hanno coperto il sole	—	—	1,245		—
14 00	—	—	—		—	—	1,253		—
14 30	—	—	1,440		—	—	1,207		0,162
15 00	—	—	1,450		692,0	32	1,180		0,186

Digitized by Google

TABELLA X. 16 agosto 1923

Ora t. m. E. c.	Stazione Montato (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1-A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	607,0	48	1,289		690.2	44	1,145		0,112
9 30	—	—	1,295		—	—	1,170		0,097
10 00	—	44	1,270		—	40	1,170		0,079
10 30	—	—	1,328		—	—	1,193		0,102
11 00	—	—	1,368		—	—	1,233		0,098
11 30	—	—	1,350			—	1,165	Nuvole	0,137
12 00	—	40	1,344		—	—	—	»	—
12 30	—	—	—	Nuvole	—	—	—	»	—
13 00	—	—	1,370		—	—	1,220		0,110
13 30	—	—	1,330		—	—	1,227		0,077
14 00	—	32	1,280		—	23	1,200		0,063
14 30	—	—	1,104		—	—	1,083		0,019
15 00	—	—	1,060		—	26	—	Nuvole	—
	(Amerio - Ricca)			17 agosto 1923			(De Pasquale)		
9 00	605,5	53	1,280		689.2	50	1,210		0,055
9 30	—	—	1,332		—	—	1,232		0,075
10 00	—	54	1,360		—	—	1,240		0,088
10 30	—	—	1,330		—	40	1,212		0,089
11 00	—	—	1,311		—	—	1,274		0,028
11 30	—	—	1,430		—	—	—	Nuvole	—
12 00	—	53	1,431			43	1,167		0,182
12 30	—	—	1,248		—	—	1,140		0,087
13 00	—	—	1,380		—	—	1,070		0,225
13 30	—	—	—	Nuvole	—	—	—	Nuvole	—
14 00	—	39	1,414		—	—	1,148		0,188
14 30	—	—	1,372		—	—	1,107		0,120
15 00	—	—	1,242		689,0	—	1,060		0,147

Digitized by Google

TABELLA XI.

ESEMPI DI MISURE COMPLETE

Montalto — 1° agosto 1922 — (Amerio - Ricca)

ORA t. m. E. c.	Temperatura	Stato igr. %	Pressione mm.	Deviazione galvan.	Deviazione media	Radiazione p. c.	OSSERVAZIONI
12,26	24°,0	64 ?	610,4	(281,6)	—	—	L'igrometro non funziona bene.
				281,8			
				282,4			
				282,0			
				283,2			
				282,7	282,5	1,570	Scartate le due deviazioni estreme, la divergenza massima tra le altre 10 che rimangono è inferiore al 5 ‰, e l'errore probabile della media è di circa ½ per mille.
				282,4			
				283,2			
				(283,8)			
				282,4			
				282,3			
				282,2			

Polsi — 10 agosto 1922 — (Amerio - Ricca)

13,26	32°,0	28	694.0	107,5			
				(107,3)			Scartando le due deviazioni estreme si ha fra le rimanenti una divergenza inferiore al 3 % e la media è determinata con un errore del 0,3 %.
				107,5			
				107,4			
				107,4			
				107,4	107,6	1,246	
				107,7			
				107,7			
				107,6			
				(107,8)			
				107,7			
				107,6			

Digitized by Google

TABELLA XII.

Segue: *Esempi di misure complete.*

Polsi — 13 agosto 1923 — (De Pasquale)

ORA t. m. E. c.	Temperatura	Stato igr. %	Pressione mm.	Deviazione galvan.	Deviazione media	Radiazione p. c.	OSSERVAZIONI
13,56	29°,0	36	691,8	123,4			
				123,2			Divergenza massima inferiore al 5 ‰; errore del valore medio inferiore a 0,5 ‰.
				123,2	123,3		
				123,4			
				123,3			
				123,4	123,3	1,247	Si osserva la leggera diminuzione nella media dei primi cinque valori con la media dei cinque successivi.
				122,8			
				123,2			
				123,4	123,2		
				123,3			
				123,4			

Montalto — 16 agosto 1923 — (Amerio - Ricca)

8,38	21°,0	45	607,0	(171,7)			
				171,8			
				171,8			Si osserva il graduale incremento della radiazione corrispondente al crescere dell'altezza del sole.
				171,8	171,9		
				171,9			
				172,0			
				172,4	172,2	1,230	
				(172,9)			In questa serie il piriliometro era nell'interno e riceveva la radiazione da un eliostata a specchio d'argento.
				172,9			
				172,5	172,5		
				172,5			
				172,2			

Digitized by Google

TABELLA XIII.

Segue: *Esempi di misure complete.*

Polsi — 11 agosto 1922 — (De Pasquale)

ORA t. m. E. c.	Temperatura	Stato igr. %	Pressione mm.	Deviazione galvan.	Deviazione media	Radiazione p. c.	OSSERVAZIONI
8,56	25°,4	29	693,8	120,9			
				120,8			Divergenza mass. 9‰. Si vede che durante la serie (8 minuti) col crescere dell'altezza del Sole cresce la radiazione solare.
				120,6	120,9		
				121,1			
				121,1			
				121,7	121,2	1,234	
				121,6			
				121,1	121,5		
				121,7			
				121,5			

Polsi — 2 agosto 1922 — (De Pasquale)

14,26	26°,7	49	691,0	110,2			
				109,6			
				110,3			Durante la serie (8 minuti) col diminuire dell'altezza del Sole diminuisce la radiazione solare.
				(110,6)	110,1		
				110,3			
				110,0			
				109,4	109,6	1,262	
				109,5			
				109,1			
				109,1	109,0		
				108,1			
				(107,8)			

Digitized by Google

TABELLA XIV.

Segue: *Esempi di misure complete.*

Montalto — 16 agosto 1923 — (Amerio - Ricca)

ORA t. m. E. c.	Temperatura	Stato igr. %	Pressione mm.	Deviazione galvan.	Deviazione media	Radiazione p. c.	OSSERVAZIONI
11,10	21°	45	607,0	192,4			Si osservi la grande uniformità di questa serie. Essa è stata ottenuta come la precedente con l'eliostata all'esterno; la divergenza massima è di 2‰. Dello specchio d'argento era stato determinato il potere riflettente che risultò 0,943. Delle serie così determinate non si tenne conto per i calcoli della costante, mancando la serie contemporanea della stazione bassa.
				(191,8)			
				192,0			
				192,0			
				192,0			
				192,0			
				192,0	192,0	1,347	
				192,0			
				192,0			
				(192,4)			
				192,0			
				192,0			

TABELLA XV.

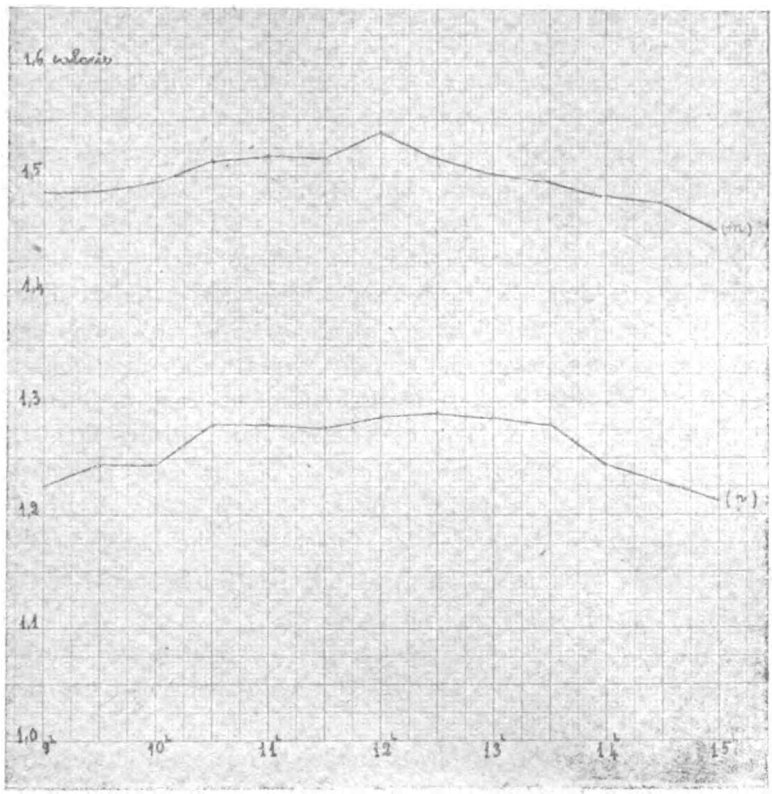
TABELLA DEGLI ELEMENTI
per il calcolo di A e valori di A ora per ora
(Confronto fra Montalto e Polsi).

ORA t. m. E. c.	A_1	A_2	ϵ_2	ϵ_3	A	ANNOTAZIONI
9	1,486	1,250	1,140	1,295	2,06	L'andamento delle misure non è simmetrico rispetto al mezzogiorno in causa dell'aumentare graduale del vapor d'acqua a partire dal mattino.
9 ½	1,487	1,245	1,040	1,181	2,10	
10	1,493	1,245	0,968	1,100	2,12	
10 ½	1,514	1,280	0,920	1,045	2,05	
11	1,519	1,280	0,888	1,008	2,08	
11 ½	1,517	1,277	0,864	0,982	2,07	
12	1,537	1,287	0,856	0,973	2,12	
12 ½	1,516	1,290	0,860	0,977	2,01	
13	1,502	1,282	0,872	0,991	1,98	
13 ½	1,495	1,280	0,904	1,027	1,95	
14	1,483	1,245	0,944	1,072	2,08	
14 ½	1,477	1,230	1,010	1,145	2,15	
15	1,454	1,213	1,122	1,248	2,12	
				Media	2,07	

Digitized by Google

TABELLA XVI.

Andamento diurno della radiazione solare dedotto dai valori medi orari, per MONTALTO (m) e POLSI (p).



Le tabelle da 1 a 10 ci dànno i valori già calcolati per le radiazioni solari a Montalto e a Polsi ora per ora.

Nella tabella 2 sono stati riportati i valori della costante solare (A) dedotti provvisoriamente con la semplice applicazione della nota formula approssimata

$$\log A = \frac{\epsilon_2 \log A_1 - \epsilon_1 \log A_2}{\epsilon_2 - \epsilon_1},$$

Digitized by Google

dove ϵ_1 e ϵ_2 indicano gli spessori atmosferici attraversati dalla radiazione solare, calcolati per mezzo della formula

$$\epsilon = \epsilon_0 \sec z,$$

essendo ϵ_0 lo spessore verticale dell'atmosfera sovrastante la stazione, e z la distanza zenitale.

Non abbiamo creduto di applicare formule più complicate perchè le misure furono sempre fatte per valori non grandi delle distanze zenitali, e nemmeno il nuovo metodo accennato, per il quale era stata fatta questa campagna, per le ragioni che sono già state dette.

Questi dati serviranno quando si saranno ottenuti, in quantità sufficiente, quegli altri determinati con le maggiori differenze di altitudine che si hanno al Monte Rosa. L'attuale deduzione serve come saggio dei risultati, sopratutto se paragonata a quelli che si sono ottenuti da altri sperimentatori, applicando gli stessi metodi per dedurre la costante dalle misure fatte.

Nelle tabelle 12 e 13 sono riportate alcune serie complete di misure eseguite a Polsi e a Montalto, allo scopo di dimostrare l'andamento del lavoro sperimentale, e che l'accordo dei dati è tale da provare che in nessuna misura precedente si era ottenuta una così notevole esattezza.

Nella tavola 14 viene rappresentato l'andamento diurno della radiazione nelle due stazioni sopracitate, dedotto ora per ora dai valori medi.

L'esame di questa tavola ci indica la necessità di eseguire numerose serie di misure per poter applicare con vantaggio il metodo ideato, perchè le differenze nei due andamenti della radiazione a Polsi e a Montalto si devono attribuire in massima a una distribuzione istantanea di vapor d'acqua, fra le due stazioni, differente da quella che si dovrebbe considerare come normale, ed è soltanto il grande numero di osservazioni che potrà darci in ogni istante il rapporto medio fra le due intensità delle radiazioni.

Giunti al termine di questa breve esposizione che non può dare che un'idea approssimata del lavoro compiuto durante i

Digitized by Google

tre periodi estivi ricordati, in condizioni spesso molto disagevoli, rivolgiamo un vivo ringraziamento al Ministero della Pubblica Istruzione per la sovvenzione accordata a questa ricerca, al Prof. G. B. Rizzo, Direttore dell'Istituto di Fisica terrestre della R. Università di Messina, per averci cortesemente fornita una parte del materiale adoperato in questa campagna, alla Direzione del Santuario di Polsi sia per la gentile ospitalità concessa nei locali del Santuario, sia per avere dato modo agli operatori di Montalto di potere risiedere colà durante tutto il periodo destinato alle misure, ai Signori Attilio Valenti studente e Ing. Filippo Borrello per avere prestata volonterosamente la loro opera, rispettivamente negli anni 1921 e 1922.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Marzo 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Majorana, Pochettino, Garelli, Vallauri e il Segretario Repossi.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Segretario presenta le seguenti pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia dal Prof. E. Pistolesi:

Contributo allo studio dell'elica in un vento laterale;

Nuove considerazioni sul problema dell'elica in un vento laterale;

Calcolo della linea elastica dell'elica;

A proposito di una supposta eccezione al teorema di Kutta-Joukowski;

Luigi Bianchi;

Alcune considerazioni sul problema del biplano indefinito.

Il Socio Sacco presenta il volume degli *Atti e lavori del I° Congresso del Po, tenuto a Piacenza nel giugno 1927, a. V,* inviato in dono all'Accademia dal Podestà di Piacenza, e ne

Digitized by Google

mette in evidenza il notevole interesse. La Presidenza esprimerà al donatore il compiacimento dell'Accademia.

All'Accademia è pure giunto in omaggio, da parte del sig. Aderito BELLI, un ritratto di Lazzaro SPALLANZANI, che entrerà a far parte della collezione dei ritratti degli Accademici più illustri, dall'Accademia stessa posseduta.

In seguito il Socio PANETTI presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota di Carlo FERRARI, dal titolo: *Sull'analogia fra i campi elettrici e i campi aerodinamici,* ed estesamente la illustra.

E dopo il Socio MATTIROLO presenta, pure per l'inserzione negli *Atti*, una Nota della dott.ssa A. M. PALAZZO, dal titolo *Le lenticelle della radice del Morus,* e brevemente ne parla.

Da ultimo il Presidente, ricordando che la prossima adunanza della Classe cade nel medesimo giorno delle elezioni politiche, propone che l'adunanza stessa sia sospesa e domanda di essere autorizzato ad accettare le Note che in tale data fossero eventualmente presentate dai Soci per l'inserzione negli *Atti*. La proposta del Presidente incontra la incondizionata approvazione della Classe.

Digitized by Google

LETTURE

Sull'analogia fra i campi elettrici e i campi aerodinamici.

Nota dell'Ing. CARLO FERRARI
presentata dal Socio nazionale residente M. Panetti.

1. — L'integrazione delle equazioni differenziali del moto dei fluidi perfetti attorno ad un ostacolo è stata eseguita solo in casi particolari, se pure molto importanti, come quelli dei cilindri indefiniti col profilo Joukowski e dei corpi di rivoluzione (1). Si comprende quindi di quale importanza sia il ricercare procedimenti che permettano di ottenere la configurazione del campo aerodinamico attorno a corpi di forma qualunque per via sperimentale. Tale problema ha già avuto una soluzione nel caso più semplice del moto piano, grazie alla analogia che per esso esiste fra i campi elettrostatici e i campi aerodinamici, nella quale si corrispondono la funzione potenziale φ del campo elettrostatico e la funzione Ψ di corrente del campo aerodinamico; le linee equipotenziali del campo elettrostatico corrispondono quindi alle linee di corrente del campo aerodinamico, il vettore intensità del campo corrisponde al vettore velocità, e il flusso del vettore intensità del campo attraverso alla superficie chiusa entro un circuito alla circuitazione lungo esso. La dimostrazione di tale analogia è immediata.

Infatti nel problema aerodinamico la funzione Ψ di una corrente piana di densità costante, all'infinito uniforme e parallela ad esempio all'asse x, in presenza di un ostacolo di forma data è definita dalle seguenti condizioni: in tutto il campo soddisfa all'equazione di Laplace $\Delta\Psi=0$; all'infinito $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_{x=\infty} = \text{costante} = U$; $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{x=\infty} = 0$;

(1) M. Panetti, *Costruzioni Aeronautiche*, Supplementi, Parte I e II.

Digitized by Google

sull'ostacolo $\frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0$ dovendo il profilo dell'ostacolo stesso essere linea di corrente; ed infine per un qualunque circuito S che si concateni coll'ostacolo

$$\int_S \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS = \Gamma = \text{costante}.$$

Il valore della circuitazione, e quindi la Ψ, è completamente determinata se il corpo, come ad es. un profilo alare di allungamento infinito, presenta a poppa una punta, dovendo in tal caso la linea di corrente staccarsi dal corpo in corrispondenza di essa.

Si consideri ora il campo elettrostatico creato in un dielettrico omogeneo da una distribuzione uniforme di cariche elettriche applicata ai limiti del campo nella direzione ad es. dell'asse x: la funzione potenziale φ soddisfa all'equazione $\Delta\varphi = 0$ in tutto lo spazio; ai limiti del campo si ha: $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \text{costante} = u$, essendo u l'intensità del campo ai suoi limiti, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$; a contatto di un conduttore collocato nel campo $\varphi = \text{costante}$ e quindi $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ dovendo all'interno del conduttore annullarsi l'intensità del campo. Sulla superficie del corpo si manifestano cariche elettriche libere distribuite con densità ρ, e quindi, se il conduttore è isolato, si ha per un qualunque circuito s che con esso si concateni

$$\Upsilon = \int_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \iint_\sigma 4\pi\rho d\sigma = 0$$

(indicando con σ l'area racchiusa da s) essendo nulla la somma delle masse elettriche che compaiono sul conduttore. Se invece questo è collegato con un punto qualunque tenuto a potenziale costante, oppure, quando si faccia uso di forze elettromotrici alternate, tenuto ad un potenziale che presenti una differenza costante nel tempo rispetto al potenziale ai limiti del campo, si ha

$$\Upsilon = \int_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \iint_\sigma 4\pi\rho d\sigma = \text{costante};$$

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

il valore della costante dipende dal potenziale dato al conduttore e dal coefficiente di induzione di questo rispetto al campo, e può quindi variare entro limiti amplissimi.

È dunque sempre possibile ottenere un rapporto $\frac{\gamma}{u} = \frac{\Gamma}{U}$: basterà dare al conduttore un potenziale tale che una linea equipotenziale si stacchi da esso dal punto voluto, in particolare nei profili alari dalla punta. Si deduce quindi senz'altro che le due funzioni Ψ e φ, soddisfacendo alle stesse equazioni ed alle stesse condizioni ai limiti, debbono essere formalmente identiche.

La realizzazione sperimentale delle proprietà sopra esposte è stata fatta per la prima volta da Relf [1] colla cosidetta " vasca elettrica „. Il campo elettrostatico è creato nell'acqua contenuta entro una vasca rettangolare per mezzo di due elettrodi costituiti da due lastre parallele di alluminio; al centro della vasca è disposto il modello colle generatrici parallele alle lastre col profilo dato e colla data orientazione. Con una punta esploratrice di dimensioni abbastanza piccole, perchè la perturbazione da essa prodotta nel campo sia trascurabile, si ricercano tutti i punti del campo che sono allo stesso potenziale di un punto di riferimento e con un pantografo si trasportano tali punti sur un foglio di disegno. Tracciando in tal modo successive linee equipotenziali del campo elettrico corrispondenti a cadute di potenziali uguali, si hanno linee di corrente del campo aereo dinamico la cui distanza risulta inversamente proporzionale al valor medio della velocità nel tratto fra esso compreso e si potrà quindi facilmente determinare la velocità al contorno del profilo per un dato valore della velocità all'infinito.

2. — L'analogia sopra esposta viene a cadere quando si considerino campi a tre dimensioni; infatti nel caso di solidi di rivoluzione investiti da corrente di direzione asintotica parallela al loro asse la funzione di corrente Ψ soddisfa all'equa-

---

[1] E. F. Relf, *An electrical method of tracing stream-lines for the two-dimensional motion of a perfect fluid* (Report and Memoranda of the Aeronautical Research-Committee).

Digitized by Google

zione (in coordinate cilindriche, x coincidente coll'asse di figura ed y normale)

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0$$

mentre la funzione potenziale del campo elettrostatico è definita dall'equazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Non mi sembra quindi privo d'interesse far vedere come in questo caso l'analogia sussista fra campi aerodinamici e campi di corrente elettrica in un mezzo conduttore omogeneo, corrispondendosi nella analogia le funzioni potenziali Φ e φ_1 dei due campi, e quindi il vettore velocità $\bar{v}$ e il vettore $\bar{i}$ densità di corrente.

La nuova analogia è basata, come la precedente, sull'identità delle equazioni e delle condizioni ai limiti cui le due funzioni Φ e φ_1 debbono soddisfare. È noto infatti che nell'interno di un mezzo conduttore omogeneo di conducibilità specifica c si ha, prescindendo dagli istanti iniziali, div. $\bar{i} = 0$, e poichè $-\text{grad}\,.\,\varphi_1 = c\,.\,\bar{i}$, si deduce div. grad. $\varphi_1 = 0$; come per un campo di corrente in un fluido incompressibile. A contatto poi di un ostacolo immerso nel campo elettrico, se l'ostacolo è costruito con materiale isolante, si ha la: componente di $\bar{i}$ normale alla superficie del corpo $\bar{i}_n = 0$ e quindi $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0$; se pertanto all'infinito le due correnti elettrica e fluida sono entrambe uniforme e parallele, le funzioni potenziali dei due campi dovranno essere formalmente identiche. Per la realizzazione sperimentale delle proprietà esposte è sufficiente la stessa vasca elettrica di Relf pur di sostituire al dielettrico (acqua pura) un conduttore (acqua acidulata) e di costruire il modello, invece che con materiale conduttore, con materiale isolante. È ancora opportuno notare che il circuito, che dalla punta esploratrice va al rivelatore, quando viene attraversato da corrente, altera il campo esterno ed in misura tanto maggiore quanto minore è la resistenza del circuito stesso rispetto a quella dell'acqua acidulata. Per ridurre al minimo la perturbazione si deve quindi avere

Digitized by Google

l'avvertenza di usare rivelatori a fortissima resistenza interna e sensibilissimi.

Il campo si potrà rappresentare per mezzo delle linee intersezione delle superficie equipotenziali con una serie di piani perpendicolari ad uno degli assi coordinati, ad es. all'asse z. Se la differenza di potenziale fra due linee equipotenziali consecutive si mantiene uguale per tutto il campo esplorato la componente V_x secondo l'asse delle x della velocità media nel tratto compreso fra le linee considerate sarà inversamente proporzionale al segmento dell'asse x compreso fra le linee stesse. Poichè, senza che ciò costituisca alcun limite alla generalità del metodo, si potrà supporre sempre la velocità all'infinito parallela all'asse x, e di intensità unitaria, risulterà senz'altro determinata la V_x. In modo analogo si determinano le due altre componenti.

Il procedimento si semplifica notevolmente se il modello su cui si sperimenta è di rivoluzione attorno all'asse x; in questo caso, con procedimento del tutto analogo a quello analitico, basterà limitare le ricerche al solo piano meridiano orizzontale e disporre il solido una prima volta coll'asse nella direzione asintotica della velocità, quindi in direzione ortogonale.

3. — Può ancora essere interessante vedere come il mezzo sperimentale descritto si presti a ricerche sui profili alari con allungamento finito, dirette a determinare la distribuzione della portanza lungo l'apertura dell'ala.

Assumo l'asse x nella direzione dell'apertura alare ed indico con Γ la circuitazione in corrispondenza del punto di ascissa x: è noto che in un'ala di apertura finita sfuggono dal vertice posteriore vortici di intensità $\frac{d\Gamma}{dx}$ che sono trasportati dal vento secondo linee di corrente del moto relativo all'ala stessa. Essi costituiscono una superficie di discontinuità tagliata in corrispondenza del punto per cui Γ è massimo $\left(\frac{d\Gamma}{dx} = 0\right)$, la quale rompe la connessione lineare dello spazio e rende quindi possibile l'esistenza di un potenziale ciclico nel campo esterno alla superficie stessa.

Digitized by Google

Il potenziale risulta quindi definito dalle seguenti condizioni [1]:

a) soddisfa in tutto lo spazio esterno all'ala ed alle superficie vorticose all'espressione $\Delta\Phi = 0$;

b) a contatto dell'ala e dei vortici liberi essendo questi disposti secondo linee di corrente è $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$;

c) per un qualunque circuito S irreducibile, che si concateni cioè con tutta una semifalda vorticosa, è $\int_S \frac{\partial\Phi}{\partial S} dS = \Gamma_{max}$.

Nel campo elettrico il potenziale φ_1 soddisfa senz'altro alla condizione *a)*; per imporre che esso soddisfi alla condizione *b)* è necessario interrompere la connessione del campo elettrico nello stesso modo col quale la connessione del campo aerodinamico è interrotta dalla falda vorticosa; si deve quindi prolungare all'infinito il profilo alare con una striscia sottilissima che si congiunge a questo in corrispondenza dell'orlo posteriore ed è fessurata in corrispondenza del piano di simmetria del modello. È opportuno notare che la forma della superficie di discontinuità del campo aerodinamico è a priori incognita in quanto essa dipende dalle velocità indotte dai vortici liberi; se però queste si suppongono piccole rispetto alla velocità all'infinito si potranno senz'altro trascurare e si potrà quindi ritenere la superficie di discontinuità piana e contenente la direzione asintotica della velocità stessa.

Per soddisfare infine alla condizione *c)* è necessario produrre una circuitazione γ in ogni circuito irriducibile s corrispondente ad S; ora per una nota legge dell'induzione elettromagnetica è $\gamma = \int_s \frac{\partial\varphi_1}{\partial s} ds =$ variazione nell'unità di tempo del flusso del vettore induzione magnetica B attraverso ad una qualunque superficie f limitata da $s = \frac{\partial}{\partial t}\int_f B_n df$.

È necessario quindi formare colle due striscie corrispondenti alle semifalde vorticose e col modello alare un circuito magnetico di grande permeabilità rispetto all'acqua per evitare

---

[1] LAMB, *Hydrodynamics* (pag. 52 della vecchia ediz. di Cambridge).

Digitized by Google

dispersioni del flusso, ed applicare al circuito una forza magnetomotrice che produca un flusso magnetico della stessa frequenza del campo esterno. La grandezza della circuitazione potrà essere variata a piacere, operando sul numero di ampère spire che si concatenano col circuito magnetico. Sarà perciò sempre possibile ottenere che le linee di corrente si stacchino dal profilo, in corrispondenza del piano di simmetria nel modello, dal suo vertice.

Un impianto sperimentale del tipo descritto per determinare la configurazione del flusso attorno ad ostacoli di forma qualunque si sta costruendo sotto la direzione del prof. Panetti nel laboratorio di Aeronautica della R. Scuola di Ingegneria di Torino.

Digitized by Google

Le lenticelle della radice del Morus.

Nota della Dott.ssa A. M. PALAZZO
presentata dal Socio nazionale residente Oreste Mattirolo.

Scopo di questa pubblicazione è lo studio di particolari produzioni che si trovano sulle radici del gelso e che si debbono considerare come lenticelle, aventi però caratteri proprii tali da differire in alcuni punti dalla struttura delle comuni lenticelle.

Tale studio mi è stato suggerito come tesi di laurea dal ch.mo prof. Mattirolo ed ho compiuto le mie ricerche sotto la sua guida nel R. Istituto Botanico da lui diretto, valendomi dei mezzi cortesemente messi a mia disposizione: colgo ora l'occasione di ringraziarlo per l'aiuto ed i consigli preziosi di cui mi fu sempre largo.

Il primo che s'occupò di queste particolari produzioni fu il prof. Cesati, che fin dal 1844 accennava ad una nuova forma di *Coniomicete* da lui chiamata *Protomyces violaceus*, il quale avrebbe infestato le radici del gelso e che, secondo lui, sarebbe stato la causa della malattia conosciuta sotto il nome di *male del falchetto!*

In seguito il prof. Gibelli (1) in un lavoro sull'argomento pubblicato nel 1872, escluse l'entità fungina e disse trattarsi di una probabile alterazione del tessuto suberoso delle radici del gelso.

Credo necessario descrivere in qual modo si presenti all'os-

(1) « Atti della VI Riunione degli Scienziati italiani tenutasi in Milano » (1872).

Digitized by Google

servazione il creduto *Protomyces violaceus* Ces. prima di trattare la questione della sua vera essenza che formò oggetto delle mie ricerche.

Esso si genererebbe nel tessuto suberoso delle radici vecchie dei gelsi languenti, sotto forma di pustole alquanto sporgenti che, a guisa di anello, cingono più o meno completamente il contorno della radice, facilmente visibili pel loro colore violaceo, che risalta sulla tinta giallo-ocracea del tessuto suberoso. Le singole pustole constano di molte laminette di sughero alternanti con altrettanti straterelli di un minutissimo pulviscolo violetto. Al microscopio si nota che gli straterelli di sughero, formati da cellule tavolari poligonali, più allungate perpendicolarmente all'asse radicale, si separano l'uno dall'altro nell'area della macchia e nello spazio interposto si raccoglie uno straterello di pulviscolo, il quale rialza le laminette più superficiali, distendendole in modo che, alla fine, queste si rompono con una fessura irregolare e contornata di margini arrovesciati e laceri. Gli straterelli più profondi restano intatti e un po' convessi a guisa di pustole. Il pulviscolo violetto consta invece di innumerevoli cellule violacee a pareti inspessite non uniformemente.

Il prof. Gibelli venne alle seguenti conclusioni:

1° " Che il *Protomyces violaceus* Ces. non è un'entità micologica, ma una ipertrofia delle forme lenticellari, che si generano nel sughero delle radici e del tronco dei gelsi, *comune a tutti i Morus, tanto sani che ammalati e indipendentemente dalla loro età* „.

2° " Che diversi sono i modi di formazione delle lenticelle e tra questi si può avere anche la scissura degli straterelli di sughero in senso orizzontale, attraverso il lume delle loro cellule „.

3° " Che gli elementi costituenti il pulviscolo violetto rappresentano il contenuto delle cellule suberose, consolidato e fuori uscito per rottura delle pareti e possono quindi essere indicate col nome di *Endocisti* „.

4° Che in quanto alla loro funzione nell'economia della nutrizione della pianta, le lenticelle sono da riguardarsi come formazioni suberose destinate a proteggere i tessuti interni

Digitized by Google

contro l'azione nociva degli agenti atmosferici, opinione già sostenuta dal Trécul per qualsiasi forma lenticellare.

Al fine di ben chiarire la genesi ed il meccanismo di formazione di questi organi particolari, ho creduto opportuno seguire fin dalle prime fasi lo sviluppo di una giovanissima radichetta.

La radice del Morus, nell'orientazione primaria dei suoi elementi e dei suoi tessuti, si presenta costituita secondo il tipo normale delle piante dicotiledoni, vale a dire, non presenta alcuna particolarità che sia degna di speciale attenzione.

Nelle giovani radichette aventi un diametro di qualche millimetro, la successione dei tessuti dall'esterno verso l'interno, è data: 1° *dall'epidermide* che funziona per breve tempo e dalla quale traggono origine i peli radicali; 2° *dall'ipoderma* che consta di pochi strati parenchimatici, formati da elementi arrotondati a pareti sottili, poggianti verso l'interno su di un 3° *endoderma*, che solo raramente è così evidente da lasciare ben distinguere i punti del Caspary, ma che in tutti i casi segna chiaramente il limite tra la corteccia e il cilindro centrale. Subito al disotto dell'endoderma, si presenta un anello più o meno regolare di sclerenchimi a pareti ispessite per quanto cellulosiche, i quali occupano la regione esterna del periciclo; 4° infine nel cilindro centrale il fascio vascolare di tipo radiale diarca, attorniato da pochi elementi procambiali, si presenta costituito da vasi spiralati ed areolati, mentre le due isole cribrose stanno ai lati delle poche trachee.

La struttura primaria della radice, quale ho sommariamente indicata, ha una durata assai breve. L'epidermide radicale esercita per poco tempo la sua funzione nel terreno ambiente per cessare definitivamente, quando ai tessuti primari succedono quelli secondarii e nuovi meristemi, entrando in azione, cambiano non solo l'orientamento dei tessuti, ma anche il loro funzionamento. Mentre per azione del cambio il fascio vascolare, nettamente radiale, assume a poco a poco l'aspetto collaterale, si stabilisce uno strato generatore subero-fellodermico all'esterno del libro primario (nella regione del periciclo) che riveste tutta la superficie della radice, producendo strati suberosi verso l'esterno e strati fellodermici verso l'interno.

Digitized by Google

I tessuti originatisi dal funzionamento di questo meristema determinano l'essiccamento di tutto il cilindro epidermico esterno che si distacca ben presto, cosicchè si assiste ad un fenomeno singolare, che la radice, per effetto immediato della formazione suberosa, diminuisce notevolmente di diametro, per aumentare nuovamente sovra tutto per azione del meristema cambiale che, originando elementi legnosi in abbondanza ed elementi cribrosi (fra i quali in questo caso sono notevoli pel loro grande sviluppo le fibre liberiane) provoca l'accrescimento diametrale della radice, il quale si continua sempre più col susseguirsi degli annuali periodi vegetativi.

Determinata dunque la posizione e l'orientazione dei vari tessuti della radice, si è in grado di poter riconoscere come si formino le aree lenticellari.

Prima di tutto occorre osservare che queste lenticelle nessun rapporto hanno cogli stomi, nè lo potrebbero avere, poichè esse si originano quando già la corteccia primitiva è sparita e quindi allorquando (supposto anche che ci fossero gli stomi nella radice) questi sono ormai scomparsi. Dalla attenta osservazione di numerose radici a questo stadio, ho potuto determinare che la formazione delle lenticelle del Morus è invece il prodotto della differenziazione delle cellule del fellogeno, le quali in certe posizioni (la cui ubicazione non ci è dato di poter individuare) dopo alcuni strati suberosi normali, dànno origine a strati di elementi a pareti cellulosiche, che diventeranno le *cellule di riempimento*: in seguito, dopo un certo numero di tali elementi a pareti dapprima sottili e cellulosiche, il fellogeno riprende la sua normale attività producendo nuovi strati suberosi.

Si ha così per opera del fellogeno una successiva alternanza di strati cellulosici e suberosi, disposti come le pagine di un libro.

Gli elementi a parete cellulosica, rinchiusi tra due strati di sughero, ingrossando i loro diametri e dividendosi, faranno poi pressione sugli strati suberosi dentro i quali sono compresi e riusciranno a romperli ristabilendo così le comunicazioni normali coll'atmosfera ambiente.

Col crescere poi del diametro del tronco nei periodi successivi

Digitized by Google

di vegetazione, gli strati cellulosici necessariamente si allargano ed allungano tangenzialmente, risultando il tronco come rivestito da grandi aree lenticellari dentro alle quali le cellule di riempimento, ispessendo e colorando la loro parete (nel modo che indicherò) — si dissociano e dànno infine origine, per la rottura degli strati suberosi esterni, a quella polvere violetta che il Cesati aveva descritto come un micete.

Evoluzione delle cellule di riempimento.

Le cellule di riempimento appaiono dapprima strette tra le lame suberose che le comprendono, sì che la loro presenza in un primo tempo è appena accennata da un leggerissimo divaricamento tra lo strato suberoso superiore e quelle inferiore. A causa di questa forte pressione, associata alla compressione reciproca, esse presentano una forma quasi rettangolare, che non è loro propria e costituiscono, le une accollate alle altre, uno strato apparentemente compatto. Rapidamente però, le singole cellule subiscono un notevole accrescimento diametrale, divengono turgescenti e per questo fatto esercitano alla loro volta una certa pressione sullo strato superiore di sughero, il quale passa alla forma convessa, assumendo l'aspetto cupuliforme caratteristico nelle produzioni lenticellari. In questo caso le cellule di riempimento appaiono molto simili a quelle del felloderma delle lenticelle: sono infatti anch'esse elementi arrotondati, a pareti cellulosiche e sottili, separate tra di loro da notevoli meati. Intanto il fellogeno prolifera attivamente, dando origine ad un nuovo strato di elementi cellulosici e successivamente ad un secondo strato di sughero; la pressione esercitata da questi elementi sommata a quelle del primo strato di cellule di riempimento che continuano frattanto ad accrescersi, provoca alfine la rottura della lama suberosa convessa, per il che le cellule di riempimento vengono a diretto contatto coll'aria ambiente e muoiono dopo aver subito, per le mutate condizioni, un rapido allungamento per estensione delle loro pareti radiali.

Da quanto ho detto appare che nel primo ciclo evolutivo della lenticella, le cellule di riempimento si limitano ad aumen-

Digitized by Google

tare progressivamente le loro dimensioni fino a rottura dello strato di sughero sovrastante, senza che per altro le loro pareti accennino a trasformazioni di alcuna sorta; non così però avviene quando la produzione lenticellare si è definitivamente stabilita e l'attività fellogenica genera con regolare alternanza elementi suberosi e cellulosici.

Infatti nel nuovo ciclo evolutivo le cellule di riempimento

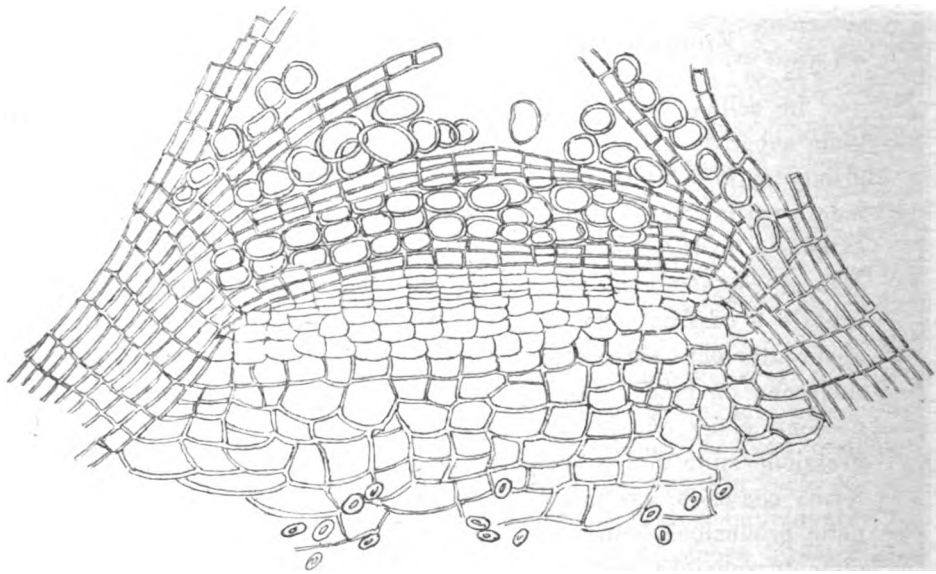


Fig. 1. — Giovane lenticella in via di sviluppo.

si dividono tangenzialmente, dando così origine ad un gran numero di nuovi elementi e mentre le dimensioni delle singole cellule vanno gradatamente aumentando e dalla forma relativamente appiattita passano a quella arrotondata, curiose trasformazioni avvengono nelle loro pareti: queste infatti vanno via via aumentando per sovrapposizione di nuovi strati di cellulosa sino a raggiungere un grado notevole di inspessimento.

Le cellule di riempimento presentano allora una cavità molto ridotta colle pareti solcate da canaletti porosi, le quali sono dotate di una particolare e forte rifrangenza. Questi elementi però, alla fine della loro evoluzione si presentano con le pareti

Digitized by Google

Fig. 2.
Lenticella sviluppatasi normalmente e lateralmente ad una radichetta.

Digitized by Google

meno ispessite ma più regolarmente compatte coi pori-canali obliterati; contemporaneamente la membrana va impregnandosi di una particolare sostanza violetta sì che alla fine essa appare intensamente colorata.

Sperimentando varie reazioni per stabilire la natura della membrana, ho potuto seguirne le modificazioni chimiche in relazione colle variazioni morfologiche e da queste appare che, mentre dapprima la sottile parete cellulare è schiettamente cellulosica, coll'iniziarsi e il progressivo aumentare dell'ispessimento, va man mano trasformandosi in un'altra varietà di cellulosa più condensata, che, se non reagisce più col cloruro di zinco iodato, dà ancora la tipica colorazione azzurra con un reattivo più energico quale quello di Russow (iodio e acido solforico) per prendere in fine, col rosso di rutenio, quando la cellula di riempimento ha raggiunto l'aspetto definitivo, la colorazione rosa intensa propria delle sostanze pectiche.

In conclusione le cellule di riempimento, prima di raggiungere la forma definitiva, devono passare per una serie di fasi, attraverso le quali la loro membrana subisce un processo di condensazione reso morfologicamente manifesto dai vari aspetti sopra ricordati assunti dalle pareti cellulari, per giungere in fine alla loro completa trasformazione in pectosa. Tale evoluzione richiede necessariamente un certo tempo ed è per questo che può svolgersi completamente solo quando la produzione lenticellare si è definitivamente stabilita e procede in relazione col normale e lento accrescimento della radice, mentre le prime cellule di riempimento, per rottura dello strato suberoso vengono a diretto contatto dell'aria ambiente quando appena si trovano nelle prime fasi.

La sostanza violetta stimo debba riguardarsi come appartenente a quel gruppo di pigmenti viola, rossi o bleu, compresi sotto il nome di *antocianine*, i quali pare abbiano rapporto coi fenomeni respiratori: il fatto di essere solubile nell'alcool, pochissimo nell'acqua e che la sua soluzione, se trattata cogli acidi, dà una colorazione rossa e verde-bluastra colle sostanze alcaline, confermerebbero questa opinione; tuttavia non ardisco spingermi più oltre in un argomento che è ancora causa di tanta incertezza.

Digitized by Google

Noterò ancora che sotto alle lenticelle largamente sviluppate che interessano una vasta regione della radice, si trovano dei gruppi di sclerenchimi particolarmente numerosi i quali, a differenza degli altri, dànno la reazione della floroglucina ed appaiono quindi lignificati.

Conclusione.

Le curiose produzioni che si riscontrano nelle radici di Morus si devono dunque considerare, come opinò il prof. Gibelli (1), quali formazioni lenticellari e sono da ascriversi, secondo la classificazione del Devaux, alle lenticelle secondarie che si originano, collo stabilirsi della struttura definitiva della radice, dai tessuti secondari. Esse appaiono di preferenza localizzate nel punto di uscita di una radichetta, anzi frequentemente si possono notare ai lati di questa due lenticelle simmetricamente disposte.

Tali lenticelle dapprima sotto forma di pustolette, col progredire dello sviluppo si accrescono maggiormente in direzione trasversale all'asse della radice, giungendo talvolta a cingerne tutto il contorno a guisa di anello.

Stabilita la natura di queste particolari formazioni, in accordo a quanto già aveva trovato il prof. Gibelli, mi credo autorizzato però dal risultato delle mie ricerche a stabilire un modo di sviluppo diverso da quello che egli aveva descritto: non si tratta cioè di una scissura in senso trasversale attraverso il lume delle cellule suberose, con conseguente fuoriuscita del contenuto consolidato sotto forma di endocisti, ciò che non può assolutamente essere ammesso, ma bensì di una iperattività del fellogeno peridermico che in determinate aree, dà alternativamente strati di elementi cellulosici e suberosi disposti come le pagine di un libro.

E contrariamente a quanto afferma il prof. Gibelli, la colorazione violetta delle lenticelle non è un fatto costante: ho potuto frequentemente osservare su radici di varie dimensioni delle macchie lenticellari ben sviluppate che presentavano una tinta giallo-aranciata simile al colore proprio del sughero di

(1) V. loc. cit.

Digitized by Google

Morus e simili a quanto si osserva nelle radici della Maclura; queste variazioni probabilmente dipendono da quel complesso di fattori, inerenti sia alle varie condizioni fisiologiche della pianta, sia all'ambiente, che determinano il formarsi dei pigmenti antocianici.

Così pure non è norma generale, come asserisce il prof. Gibelli, che lenticelle violette siano comuni a tutti i gelsi, tanto sani che ammalati e indipendentemente dall'età e dal luogo di provenienza: infatti, mentre le radici di alcuni gelsi appaiono completamente invase da queste formazioni, le quali portano ad una estesa esfogliazione degli strati suberosi, altre invece presentano l'involucro suberoso integro con rare lenticelle di dimensioni normali.

Questo fatto può essere interpretato come una conseguenza della particolare funzione che si attribuisce alla lenticella nel meccanismo vitale della pianta. Essa rappresenta non già, come pensava Trécul e come riconfermò Gibelli, una formazione destinata a proteggere i tessuti interni dall'azione nociva degli agenti atmosferici, ma un organo della traspirazione, che continuamente si adatta alle condizioni di umidità esterna ed interna e che partecipa in larga misura agli scambi gassosi generali. È dunque naturale che, se la radice si trova in terreni non adatti ai particolari bisogni del gelso, sia per eccessiva umidità sia per mancanza di ossigeno, essa reagisca col maggiore sviluppo dei suoi organi respiratorî sotterranei.

Questa spiegazione verrebbe confermata da quanto riferisce il Sorauer, il quale parla di una " *Lohkrankheit* „ che si manifesta negli alberi costretti a vivere in terreni poco adatti, nelle radici dei quali si osservano anormali produzioni corticali legate specialmente allo sviluppo esagerato di cellule lenticellari, che appaiono sotto forma di rigonfiamenti e di nodosità. La radice reagisce come può alla mancanza di ossigeno ingrandendo i suoi organi respiratorî (1).

---

(1) Questi stessi fatti si osservano anche nelle piante non solo sulla radice, ma sui fusti nei quali la respirazione è impedita dai muschi, epatiche, ecc. Groebner ha studiato nei pini questa malattia, alla quale Sorauer ha dato il nome di *Rindenmulm*.

Digitized by Google

BIBLIOGRAFIA

1. - H. Baillon, *Histoire des plantes*, 1877.
2. - Castelet, *Sur le Mûrier blanc.*
3. - De Candolle, *Premier Mémoire sur les lenticelles des arbres et le développement des racines qui en sortent.* " Annales Sc. Nat. „, 1ª serie, T. VIII, 1826.
4. - — — *L'origine des plantes cultivées*, 1886.
5. - M. H. Devaux, *Origine de la structure des lenticelles.* " C.-R. Acad. des Sciences „, 16 maggio 1898.
6. - — — *Recherches sur les lenticelles.* " Annales des Sciences Naturelles „, Tome XII, 1900.
7. - Cesati Vincenzo, Resoconto dell'adunanza del giorno 23 sett. 1845. " Atti della VI Riunione degli Scienziati italiani tenuta a Milano „ (1872).
8. - *Dictionnaire universel d'histoire naturelle*, 1861.
9. - Gibelli, *Sul* " Protomyces violaceus *Cesati* „ *e sulle lenticelle.* " Atti della VI Riunione degli Scienziati italiani „.
10. - Hugo Mohl, *Untersuchungen über die Lenticellen. Vermischte Schriften Bot.* " Ann. Sc. Nat. „, T. X, 1838.
11. - M. Molliard, *Nutrition de la Plante. Utilisation des substances ternaires.*
12. - — — *Formation des substances ternaires.* " Encyclop. Scientifique „.
13. - Noelli A., *Sull'origine delle lenticelle nel* " Sambucus *Nigra* „. " Bollettino della Soc. Botanica Ital. „, anno 1926, N. 1.
14. - Séringe, *Description et culture des Mûriers.*
15. - Sorauer, *Handbuch der Pflanzenkrankheiten*, Band I, 1924.
16. - Stahl, *Entwickelungsgeschichte und Anatomie der Lenticellen.* " Bull. Soc. Bot. de France „, t. XXI, 1874.
17. - Strasburger, *Trattato di Botanica.*
18. - Trécul, *Remarques sur l'origine des lenticelles.* " C.-R. Académie des Sciences „, t. LXXXIII, 1871.
19. - M. Wheldate, *The Anthocyanin pigments of Plante*, 1916.
20. - Wetmore (Ralpig H.), *Rapporti delle lenticelle e dei raggi midollari.* (" Bot. Gazette „, LXXXII, 1926).

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 14 Aprile 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono intervenuti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Panetti, Sacco, Pochettino, Garelli, Vallauri e il Segretario Repossi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: De Sanctis, Vidari, Cian, Solari e il Segretario Faggi.

Scusano la loro assenza i Soci: Grassi, Somigliana, Majorana, Boggio, Ruffini e Brondi.

Aperta la seduta si legge il verbale dell'adunanza precedente, che è approvato senza osservazioni.

Il Presidente, ricordando che la Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, nella sua ultima adunanza ha proposto per acclamazione la nomina a Socio nazionale residente di S. A. R. il Duca d'Aosta, si onora di presentare all'Accademia il seguente telegramma che S. A. R. ha voluto inviare alla Presidenza in risposta all'annuncio dell'avvenuta proposta:

Accolgo con fierezza designazione della Reale Accademia poichè alto ed illustre consesso ha premiato nell'opera mia la devozione degli innumeri oscuri eroi che hanno illuminato la mia inesausta passione italica. Con gratissimo animo ringrazio e saluto.

Emanuele Filiberto di Savoia.

Digitized by Google

Il Presidente invita quindi il Socio POCHETTINO a leggere la prima Relazione della Commissione per l'assegnazione del Premio Vallauri per il quadriennio 1923-26.

La lettura della Relazione non suscitando nessuna osservazione nè proposta da parte dei Soci, si rimette alla Classe Fisica la nomina di due altri Commissari a completamento della Commissione giudicatrice, giusta il disposto dello Statuto del Premio Vallauri.

Gli Accademici Segretari:
EMILIO REPOSSI
ADOLFO FAGGI

Digitized by Google

Relazione *della Commissione per il Premio Vallauri*
(quadriennio 1923-26).

Illustri Colleghi,

Al concorso per il Premio Vallauri, rispondente al quadriennio 1923-1926, non si presentò alcun concorrente. La Commissione giudicatrice pertanto ritenne opportuno valersi della facoltà concessale dallo statuto della fondazione interpellando tutti i Soci Nazionali perchè designassero quegli studiosi che, a loro giudizio, sembrassero degni di conseguire il premio. Rispose soltanto il Socio prof. Panetti proponendo, in una erudita e convincente relazione, che il premio venisse assegnato al sig. Alessandro Marchetti, Direttore tecnico della S. I. A. I.: Società Idrovolanti Alta Italia, per i suoi progetti di velivoli di ogni specie che, costruiti nelle officine da lui stesso dirette, hanno assicurato all'Italia un invidiabile primato nel campo dell'Aviazione.

La Commissione unanimemente ritenne doversi prendere in favorevole considerazione la proposta del prof. Panetti, tanto più che fra coloro che possono conseguire il premio Vallauri, oltre ai cultori di Fisica pura, vanno compresi quelli che si dedicano alla Fisica applicata, della quale la Aerotecnica è certo una delle parti attualmente più importanti. Sembrò però alla Commissione opportuno, su proposta del Commissario prof. Somigliana, tener conto anche di un insigne cultore dell'Aerotecnica, la cui opera era già stata qui ricordata dallo stesso prof. Panetti in altra occasione, e cioè del prof. Enrico Pistolesi della R. Scuola di Ingegneria di Pisa, teorico questi dell'aerodinamica, ma cultore di quella Teorica-tecnica che, se non

Digitized by Google

brilla per l'eleganza e per il rigore assoluto della trattazione come le corrispondenti branche della Fisica matematica, ha il vantaggio di presentare formole pratiche di immediata applicazione ai casi reali e concreti. Insomma la Commissione ritenne doversi considerare non solo il progettista audace e geniale, ma anche il teorico che, con i suoi studi severi, rende possibile la via che il primo deve seguire.

Su l'opera dunque del sig. Marchetti e del prof. Pistolesi si fermò l'attenzione della Vostra Commissione, la quale, oltre che dal merito intrinseco dei loro studi che portano l'impronta genuina della genialità italiana, sempre pronta a congiungere nella più bella armonia le elevate idealità e le attitudini pratiche, fu mossa dalla sensazione di compiere atto di giustizia mettendo in rilievo l'opera di questi lavoratori dell'Aviazione che spesso quasi si dimenticano di fronte all'ammirazione che in tutti destano le gesta degli aviatori, i quali compiono sì miracoli di audacia, di abilità, di eroismo, ma grazie sopratutto agli strumenti perfetti che lo studioso, il progettista e il costruttore misero a disposizione delle loro meravigliose attitudini.

Ecco Vi, pertanto, Illustri Colleghi, il parere della Vostra Commissione:

È noto a tutti come, rispetto al velivolo attuale, il problema dell'elica sia forse il più importante in quanto dal conveniente adattamento del propulsore e del motore all'aeromobile dipende la possibilità di ottenere un apparecchio rispondente alle esigenze di economia, di velocità e di autonomia che oggi si richiedono, e come ancora tutti i quesiti pratici del volo, sia orizzontale che in salita o discesa, della quota di tangenza, delle manovre occasionali e delle acrobazie da combattimento siano risolubili soltanto se il comportamento dell'elica è noto. La teoria pertanto dell'elica ha recentemente progredito con grande rapidità e ci andiamo sempre più avvicinando alla completa conoscenza del fenomeno aerodinamico corrispondente; a questo progresso il prof. Pistolesi ha contribuito in modo indubbiamente notevole. Dotato di una solida coltura matematica

Digitized by Google

e tecnica, della quale fanno fede le sue numerose pubblicazioni, egli stabiliva le basi precise delle nuove teorie dell'elica nel suo lavoro: *Le equazioni differenziali del moto dei fluidi applicate al campo di velocità prodotto dall'elica*, e le svolgeva dettagliatamente poi in altri due lavori di notevole mole, l'uno dal titolo: *I propulsori elicoidali e i recenti progressi dell'aerodinamica*, l'altro dal titolo: *Nuovi indirizzi e sviluppi della teoria delle eliche*. In questi lavori è contenuta una trattazione completa dell'argomento, nella quale sono da rilevarsi l'introduzione e la elaborazione di concetti veramente geniali per determinare il modo con cui lavora ogni elemento delle pale di un'elica.

Successivamente il Pistolesi curò lo svolgimento delle sue teorie fino alle ultime conclusioni capaci di guidare direttamente il progettista. Si segnalano a questo riguardo: *La teoria semplificata dell'elica*, e la estensione di essa al *Problema fondamentale delle eliche a passo variabile*, trattato con una chiara volgarizzazione di perfetto rigore in una estesa e dettagliata monografia; intanto in pubblicazioni litografiche per gli studenti di Ingegneria aeronautica rielabora e perfeziona il ricco materiale, introducendo la polare dell'elica, strumento di calcolo divenuto ormai classico per il progettista, trattando il caso interessante delle eliche *in tandem* e dando nuovi procedimenti per la risoluzione del problema fondamentale in un'altra estesa monografia dal titolo: *Metodi grafici per il calcolo delle eliche*.

In seguito, nel 1924 e nel 1925, trattando in due note il problema dell'elica intubata e quello dei sistemi di palette rotanti in un fluido, il Pistolesi, su la base dei moderni metodi della dinamica dei fluidi, ha saputo dimostrare l'intimo legame che passa fra la teoria dell'elica di propulsione e quella delle motrici a turbina, e mettere in evidenza come da tale applicazione siano nate le turbine idrauliche veloci per piccole cadute, che costituiscono una delle più importanti novità nel campo delle macchine.

Finalmente con la nota: *Influsso di un vento laterale sul funzionamento delle eliche*, dell'ottobre 1925, e con quella comparsa un anno dopo: *Considerazioni sull'autogiro*, il Pistolesi pre-

Digitized by Google

lude alle nuove ricerche sull'elica funzionante come mezzo di sostentamento, su le quali in questi ultissimi anni si è nuovamente fermata l'attenzione di quanti si occupano di Aviazione. È da ricordare ancora che, con due studi inseriti negli *Atti* della nostra Accademia per il 1926, il Pistolesi ha saputo affermarsi nel campo della Meccanica applicata e precisamente trattando del fenomeno *Dello slittamento dei flessibili.*

Il complesso dei lavori di questo studioso, qui elencati, costituisce dunque un insieme di ricerche coordinate e dirette al progresso dell'Aerodinamica tecnica, al quale l'autore ha contribuito con rara efficacia, anche prima e dopo il periodo riferentesi al premio di cui ci occupiamo, con una serie numerosa di altre indagini importantissime. Ma l'elenco delle sue pubblicazioni nel periodo quadriennale interessante questo premio Vallauri, è prova della mole complessiva della sua opera scientifica e indice del suo valore come scienziato. Nè è da dimenticare che il Pistolesi è uno dei principali animatori degli studi italiani nel campo dell'Aeronautica, che egli promuove per mezzo del periodico tecnico: *Atti della Associazione italiana di Aerotecnica*, da lui creato e diretto.

Nel campo delle realizzazioni è sommamente degna di nota l'opera di Alessandro Marchetti, il geniale ideatore di tanti apparecchi, campioni insuperati per la *finezza* delle forme alla quale egli ha giustamente attribuito, in ogni sua creazione, la più grande importanza come quell'elemento da cui dipendono le caratteristiche più ricercate e più difficilmente raggiungibili e cioè: la pendenza minima del volo librato, la possibilità di raggiungere velocità e autonomia massime, e di elevarsi alle più alte quote di tangenza.

Tale *finezza* della forma si nota già nell'apparecchio metallico da combattimento *MVT*, che egli, come Direttore tecnico del reparto Aviazione della Wickers-Terni, ideò e costrusse nel 1917. Con esso, nei due anni successivi, furono conquistati i campionati di velocità per apparecchi terrestri; in questo apparecchio le cospicue doti del progettista apparvero in pieno nella sapiente e difficile conciliazione di una *finezza*, per quei

Digitized by Google

tempi eccezionale, con una soddisfacente robustezza di struttura, nonchè nella sua coraggiosa iniziativa di costruttore, che, fin da quel tempo, intuendo il grande avvenire della costruzione metallica, si decise ad attuarla fra difficoltà allora gravissime.

Ma l'opera del Marchetti appare veramente eccezionale per l'appunto nel quadriennio al quale si riferisce l'assegnazione dell'attuale premio Vallauri; assunta la carica di Direttore tecnico della S. I. A. I., egli seppe ideare e costruire una serie di apparecchi di svariata struttura e precisamente: in un primo tempo, l'idrovolante da corsa *S 51*, campione di velocità nel 1924, e l'aeroplano metallico da combattimento *S 52*, entrambi con un motore da 300 cavalli; in un secondo tempo, l'idrovolante *S 16 ter* con un motore di 450 cavalli e l'idroplano *S 55* con due galleggianti gemelli e due motori in tandem, ciascuno da 500 cavalli, che nel 1926 si affermò vincitore di ben 14 campionati mondiali. L'apparecchio *S 51* rappresenta una di quelle concezioni che, curate per una gara di velocità, hanno aperto, con i necessari ritocchi, la via al progresso degli apparecchi velocissimi da combattimento. La ricerca minuziosa della riduzione al minimo delle resistenze, il problema del volo su traiettorie curvilinee, che diventa formidabile nei regimi a velocità forzata, dànno a queste gare l'ufficio di scuola per continui perfezionamenti. Anche se oggi noi, nel celere pulsare del progresso continuo, guardiamo alle ideazioni di cinque anni or sono con il sentimento di chi è avvezzo a forme più evolute, non dobbiamo non riconoscere il merito di chi ha saputo in quel tempo concepirle e tradurle in atto, ed ha continuato e continua a farle progredire verso mete sempre più elevate; d'altronde non conviene dimenticare come incredibilmente semplice e naturale sembri ogni risultato quando è stato ottenuto, ma come difficile a raggiungersi esso ci appaia, finchè non è nota la via che conduce al suo conseguimento.

Ricorderemo inoltre come con l'idrovolante *S 16 ter* il generale De Pinedo abbia compiuto nel 1925 il famoso volo di 55.000 chilometri attraverso l'Oceano Indiano, l'Australia, e l'Estremo Oriente, e come con l'idroplano *S 55* lo stesso Generale abbia sorvolato due volte l'Atlantico e quasi tutto il Con-

Digitized by Google

tinente americano. Questo apparecchio, con le sue qualità nautiche che la mente geniale del Marchetti seppe conciliare con un'elevata *finezza*, con l'introduzione dell'uso di due motori in tandem, con la felice proporzione delle eliche propulsatrici che permette un ottimo equilibrio delle due unità motrici ed un alto rendimento dei due propulsori sebbene uno operi nella scia dell'altro, rappresenta una concezione che i rapidissimi progressi odierni non hanno sorpassato e stenteranno a sorpassare. Non possiamo infine dimenticare, esaminando la struttura e i pregi aeronautici di questo monoplano, che da esso, per semplice trasformazione in apparecchio terrestre e corrispondente diminuzione della potenza sistemata a bordo, il Marchetti trasse l'apparecchio *S 64*, di *finezza* superiore a tutte quelle finora raggiunte, con il quale i Comandanti Ferrarin e Del Prete poterono dare all'Italia il primato per la lunghezza di volo.

EccoVi esposte sommariamente le opere dei due proposti per il premio Vallauri. La Vostra Commissione, come Vi dissi in principio, ha unanimemente riconosciuto essere entrambi meritevoli di parere favorevole, ma, dovendosi poi decidere a quale dei due dovesse definitivamente assegnarsi il premio, si trovò in grande perplessità. Chè, se l'opera del prof. Pistolesi ha certamente carattere più scientifico che non quella del sig. Marchetti, non v'è dubbio che questa è caratterizzata da una maggiore genialità e da maggiore intuito creativo. Ambedue subiranno forse l'ingiuria del tempo, ma questa è la sorte comune di tutte le ricerche scientifico-tecniche; e poi il nome di coloro che fra i primi hanno portato ad un reale progresso, sia nella scienza che nella tecnica, non deve essere dimenticato in quanto che al giorno d'oggi, e specialmente in certi campi di attività, la ricerca è così febbrile, il progresso così rapido, il numero degli studiosi così grande, che coloro i quali riescono ad imprimere nel solco dell'umano progredire un'orma decisiva e personale, sono veramente degni della nostra ammirazione.

Tali ci sono sembrati tanto il prof. Enrico Pistolesi quanto il sig. Alessandro Marchetti e pertanto la Vostra Commissione

Digitized by Google

ha unimemente deciso che il premio Vallauri 1923-1926 venga diviso in parti uguali fra questi due valorosi.

Illustri Colleghi, noi speriamo che Voi vorrete accogliere la nostra proposta: il Vostro voto favorevole avrà, ne siamo sicuri, un'eco di plauso presso quanti sentono che il passato di gloria degli antichi navigatori italiani può oggi rivivere nel cielo, attraverso il quale vogliamo e sapremo portare nel mondo il nome d'Italia; presso quanti hanno a cuore le sorti della nostra Aviazione e attendono dalla scienza aviatoria, che è esperienza, ma è ancora in parte divinazione, nuove possibilità, nuovi mezzi per i commerci, per il lavoro fecondo, per la fortuna e la potenza del popolo italiano.

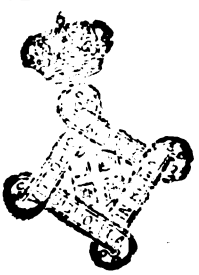
La Commissione:

C. F. Parona, *Presidente*

G. Grassi
C. Somigliana
G. Ponzio
M. Panetti
G. C. Vallauri
Membri

A. Pochettino, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Emilio Repossi.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913. 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

Opere scelte di Amedeo Avogadro (per cura di I. Guareschi).

Torino, Unione tipografico-editrice torinese, 1911, 1 vol. in-4° (4 csn., CXL-492 pp., 1 ritr.).

Miscellanea di studi danteschi. ***Dante e il Piemonte.***

Torino, Fratelli Bocca editori, 1922, in-8° (VIII-648 pp.).

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Amerio (A.), De Pasquale (O.), Ricca (V.). — Misure pireliometriche eseguite sull'Aspromonte . . . . . *Pag.* 159

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 10 Marzo 1929 . . „ 188

Ferrari (Carlo). — Sull'analogia fra i campi elettrici e i campi aerodinamici . . . . . „ 190

Palazzo (A. M.). — Le lenticelle della radice del Morus . . . „ 197

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 14 Aprile 1929 . *Pag.* 208

Relazione della Commissione per il Premio Vallauri (1923-1926) „ 210

Tip. Vincenzo Bona - Torino

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

BIBLIOTECA REALE TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIV, DISP. 11ª, 12ª E 13ª, 1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Aprile 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Panetti, Sacco, Pochettino, Vallauri e il Segretario Repossi.

Scusano la loro assenza i Soci: Grassi, Somigliana, Majorana, Boggio e Garelli.

Il Socio Sacco presenta in omaggio all'Accademia due suoi opuscoli: *Il glacialismo nelle Valli di Pinerolo* e *Il glacialismo nelle Valli di Lanzo*; e il Socio Panetti gli *Atti del Congresso annuale dell'Associazione Italiana di Aerotecnica*.

Il Socio Peano presenta in seguito, a nome del Socio Boggio assente, per l'inserzione negli *Atti*, una Nota di Antonio Colucci, dal titolo: *Trattazione in grande del problema dei valori iniziali per le equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti.*

Il Socio Panetti presenta, illustrandola brevemente, una Nota del Socio corrispondente Giuseppe Albenga, dal titolo:

Digitized by Google

A proposito di qualche formola approssimata per una trave inflessa e sollecitata assialmente.

Si passa poi alla votazione per la nomina dei due membri a integrazione della Commissione pel Premio Vallauri, e risultano eletti i Soci PANETTI e VALLAURI.

L'adunanza si chiude con l'invio, dietro proposta del Socio PANETTI, di un saluto e di un augurio al Socio SOMIGLIANA.

Digitized by Google

LETTURE

Trattazione in grande del problema dei valori iniziali per le equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti.

Nota del Dott. ANTONIO COLUCCI
presentata dal Socio nazionale residente T. Boggio.

Il prof. PICONE, in un suo recente lavoro (1), trattando, fra l'altro, delle equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine (a due e a tre variabili indipendenti), ha dato, per queste equazioni, dei teoremi assai interessanti ed affatto nuovi, qualcuno dei quali desta viva sorpresa pel suo singolare carattere.

Scriviamo l'equazione lineare alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti sotto la forma:

$$(1) \qquad b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)\,u = f(x,y),$$

ove $b_1(x,y)$, $b_2(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y)$ si suppongono assegnate funzioni continue nel rettangolo $\boldsymbol{R}$ (v. figura) definito dalle limitazioni:

$$x' \leq x \leq x'', \qquad y' \leq y \leq y'';$$

e prendiamo le mosse dal seguente teorema dovuto a PICONE:

Se, in $\boldsymbol{R}$, le due funzioni $b_1(x,y)$, $b_2(x,y)$ non prendono mai

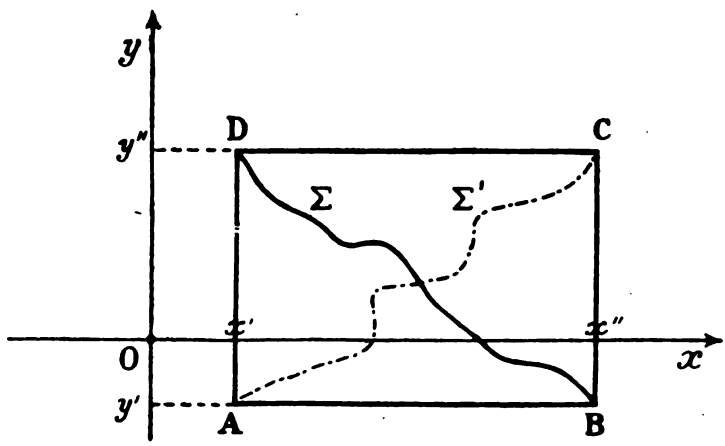
(1) *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del second'ordine*, di prossima pubblicazione negli "Annali di Matematica pura ed applicata". Questa Memoria è stata insignita del premio Tenore dell'Accademia Pontaniana di Napoli, nella seduta del 10 giugno 1928.

Digitized by Google

valori di segno opposto (dello stesso segno), ed una di esse è ivi sempre non nulla, una soluzione dell'equazione (1) *riesce completamente determinata in* R *dai valori che essa assume su di una curva semplice* Σ (Σ'), *tutta contenuta in* R *e terminata ai punti* $D(x', y'')$, $B(x'', y')$, [$A(x', y')$, $C(x'', y'')$].

Questo teorema, per quanto a me consta, rappresenta un primo risultato nella trattazione, *in grande,* dell'integrazione delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine.

Se, per fissare le idee, consideriamo il caso delle due funzioni $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$ non di segno opposto in tutti i punti del rettangolo R, la curva Σ atta ad individuare una soluzione dell'equazione (1), quando si diano su di essa i valori della soluzione stessa, deve congiungere i vertici D e B del rettangolo. Ebbene, nel citato lavoro del Picone è dimostrato, con esempi, che se, invece, la curva Σ congiunge gli altri due vertici A e C, *vi sono in generale infinite soluzioni della* (1) *che assumono sulla curva valori prescritti, laddove tali valori non sempre si possono assegnare arbitrariamente, inquantochè i valori sopra un certo pezzo della curva possono talora determinare completamente quelli sul pezzo rimanente.*



Eppure, una tal curva Σ può non essere nè una *curva caratteristica* dell'equazione, nè avere alcun tratto in comune con una tale curva; ed inoltre può indifferentemente scriversene

Digitized by Google

l'equazione, risoluta tanto rispetto alla x come rispetto alla y. Pertanto, se si prendessero senz'altro i risultati classici della teoria generale delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine [1] — secondo i quali ad una soluzione di una tale equazione, risolubile rispetto ad una delle derivate in tutto il rettangolo R, si possono prescrivere arbitrariamente i valori sopra ogni curva che non sia una caratteristica — si sarebbe indotti a vedere nelle suddette conclusioni un paradosso.

Il paradosso non può rimuoversi se non considerando che la costruzione della soluzione dell'equazione, verificante le assegnate condizioni iniziali, è, nel teorema di PICONE, richiesta in *tutto* un assegnato rettangolo R, e non soltanto lungo un intorno della curva portante i dati, come risulta dalla precisa applicazione dei classici risultati. Lo studio in grande dell'integrazione delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine offre dunque un effettivo interesse per la presunzione — ben fondata dopo quanto si legge nel citato lavoro di PICONE — che debbano presentarsi in esso studio fatti nuovi e del tutto insospettati.

Il contenuto stesso del teorema riportato induce a porre, per le equazioni del tipo (1), un problema analogo a quelli classici detti dei valori al contorno, che si incontrano in celebri capitoli di Analisi e di Fisica-Matematica. Propriamente, si presenta qui il problema seguente, che chiameremo il *problema dei valori iniziali*:

Data una successione continua di valori su di una curva semplice $\Sigma(\Sigma')$ *di estremi* (x', y''), (x'', y'), $[(x', y'), (x'', y'')]$, *totalmente contenuta in* R, *costruire in tale rettangolo la soluzione* $u(x, y)$ *della* (1) *che su* $\Sigma(\Sigma')$ *prende i vatori dati* [2].

Di questo problema dò qui una prima soluzione traendo

---

[1] Cfr. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 374. Paris, 1925.

[2] Una recentissima trattazione, in grande, dell'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine e di tipo iperbolico, non ridotte a forma canonica, hanno compiuto FRIEDRICHS e LEWY nella interessante Nota: *Uber die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösung beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen* (" Math. Annalen „, 98 (1927), pp. 192-204).

Digitized by Google

profitto dalla preventiva integrazione dell'equazione delle curve caratteristiche:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_2(x, y)}{b_1(x, y)}.$$

Ritengo però desiderabile e possibile una trattazione esclusivamente *integro-lineare* del problema *lineare* in esame. Di ciò conto di occuparmi in un prossimo lavoro, nel quale, oltre ad allargare le condizioni di validità dei miei risultati, spero di potere anche passare allo studio degli analoghi problemi per le equazioni alle derivate parziali lineari in quante si vogliano variabili indipendenti, alle quali è pure fatto cenno nel citato lavoro del PICONE.

1. — Ammettiamo, provvisoriamente, che $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$ verifichino in $\boldsymbol{R}$ l'unica diseguaglianza:

$$b_1^2 + b_2^2 > 0. \tag{2}$$

Preso, ad arbitrio, un punto $P \equiv (x, y)$ nel rettangolo $\boldsymbol{R}$ consideriamo per esso l'asse p avente per coseni direttori:

$$\frac{b_1}{|\sqrt{b_1^2 + b_2^2}|}, \qquad \frac{b_2}{|\sqrt{b_1^2 + b_2^2}|},$$

rispettivamente. Ad ogni punto di $\boldsymbol{R}$ viene così ad associarsi un asse ben determinato, passante pel punto.

Posto:

$$\gamma = \frac{c}{|\sqrt{b_1^2 + b_2^2}|}, \qquad \varphi = \frac{f}{|\sqrt{b_1^2 + b_2^2}|},$$

l'equazione (1) può scriversi sotto la forma:

$$\frac{du}{dp} + \gamma u = \varphi, \tag{3}$$

dove, com'è ovvio, $\frac{du}{dp}$ indica la derivata di u in P, *nella direzione di p*.

Digitized by Google

Consideriamo ora l'equazione differenziale delle *curve caratteristiche* (nel piano xy):

$$b_2(x, y)\,dx - b_1(x, y)\,dy = 0. \tag{4}$$

È subito visto che per ogni punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ interno al rettangolo $\boldsymbol{R}$ passa sempre (almeno) un arco di curva caratteristica, dotato di un'equazione di tipo esplicito $y = y(x)$, oppure $x = x(y)$.

Invero, se $b_1(x_0, y_0) \neq 0$, in un certo intorno del punto P_0 la (4) si lascia scrivere sotto la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_2(x, y)}{b_1(x, y)}, \tag{4'}$$

e questa, per un noto teorema [1] della teoria delle equazioni differenziali ordinarie, ci assicura l'esistenza di (almeno) una funzione continua $y = y(x)$ verificante l'equazione (4') e tale che $y(x_0) = y_0$.

Se, invece, in P_0 risultasse $b_1 = 0$, in tal punto si avrebbe, in virtù della (2), $b_2(x_0, y_0) \neq 0$: si ragionerebbe allora sull'altra equazione:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b_1(x, y)}{b_2(x, y)}. \tag{4''}$$

Sia σ_0 una di queste curve. È chiaro che in ogni punto P di essa l'asse p risulta tangente alla curva.

Scegliamo su questa P_0 come origine degli archi; e per verso positivo dei medesimi prendiamo quello che, in ogni punto della curva, concorda con il verso di p. Detta s l'ascissa curvilinea di P su σ_0, le funzioni $u(x, y)$, $\Upsilon(x, y)$, $\varphi(x, y)$ divengono, su tale curva, delle funzioni di s. Indichiamole con $u(s)$, $\Upsilon(s)$, $\varphi(s)$.

Si ha:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{du}{dp},$$

---

[1] Cfr. ad es. G. Peano, *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine.* " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino „, 1886.

Digitized by Google

e la (3), considerata pei punti di σ_0, diviene

$$\frac{du}{ds} + \gamma(s)\, u(s) = \varphi(s).$$

Integrando si ricava:

$$(5) \qquad u(s) = e^{-\int_0^s \gamma(s)\,ds} \left[u_0 + \int_0^s \varphi(s)\, e^{\int_0^s \gamma(s)\,ds}\, ds \right],$$

dove $u_0 = u(0)$.

Concludiamo dunque che: *qualunque sia la posizione del punto P_0 nell'interno del rettangolo R, conoscendo il valore u_0 di una soluzione della* (1) *in quel punto, si possono calcolare i valori di tale soluzione in tutti i punti di uno o più archi caratteristici passanti per P_0.*

2. — Mettendo in relazione quanto ora si è detto col ricordato teorema di PICONE, si è naturalmente condotti a porre, pel problema enunciato in principio, delle opportune limitazioni miranti ad assicurare, insieme, l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione (1). Queste limitazioni le faremo nel seguito gradatamente, a mano a mano che se ne presenta la necessità.

In questo numero faremo le seguenti ipotesi:

1) Le funzioni $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$ verificano, in tutto R, le condizioni:

$$b_1(x, y) \neq 0\,, \qquad b_1(x, y)\, .\, b_2(x, y) \geq 0\,;$$

2) la funzione $\frac{b_2(x, y)}{b_1(x, y)}$ è, in R, lipschitziana rispetto alla variabile y;

3) la curva Σ, di estremi (x', y''), (x'', y'), è l'imagine di una funzione $y = \lambda(x)$, continua e decrescente della variabile x nell'intervallo (x', x'') [1].

---

[1] Trattiamo qui soltanto il problema relativo alla curva Σ. L'altro si conduce in maniera perfettamente analoga; ma su ciò ritorneremo alla fine del lavoro.

Digitized by Google

La condizione (2), in virtù di un noto teorema di Analisi (1), ci permette di asserire che per ogni punto interno al rettangolo passa una ed una sola curva integrale dell'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_2(x,y)}{b_1(x,y)}. \tag{6}$$

Si tratta ora di far vedere che comunque si prenda il punto, la relativa caratteristica incontra in *un punto ben determinato la curva* Σ.

In tale intento, considero la funzione $\beta(x,y)$ definita nella striscia:

$$x' \leq x \leq x'', \qquad -\infty < y < +\infty,$$

al modo seguente:

$$\beta(x,y) = \frac{b_2(x,y)}{b_1(x,y)}, \text{ nei punti di } \boldsymbol{R} \text{ (frontiera inclusa)},$$

$$\beta(x,y) = \frac{b_2(x,y')}{b_1(x,y')}, \text{ per } x' \leq x \leq x'', \quad y < y',$$

$$\beta(x,y) = \frac{b_2(x,y'')}{b_1(x,y'')}, \text{ per } x' \leq x \leq x'', \quad y > y''.$$

La funzione $\beta(x,y)$ riesce, ovviamente, lipschitziana rispetto ad y in tutta la striscia, epperò per ogni punto di $\boldsymbol{R}$ passa *una* curva integrale dell'equazione (2)

$$\frac{dy}{dx} = \beta(x,y),$$

terminata alle rette di equazioni $x = x'$, $x = x''$.

Se si considera la parte di questa curva contenuta in $\boldsymbol{R}$, si ottiene una curva integrale dell'equazione (6), in *tutta la sua estensione*. E poichè, per l'ipotesi (1), la curva caratteristica relativa ad un qualunque punto di $\boldsymbol{R}$ risulta *non decrescente* in

---

(1) Goursat, *Cours d'Analyse*, vol. II, pp. 365-369. Paris 1911.

(2) Goursat, *Cours d'Analyse*, vol. II, p. 370. Paris, 1911.

Digitized by Google

tutto l'intervallo (x', x''), ne segue che essa deve incontrare la frontiera di $\boldsymbol{R}$ in due punti ben determinati, situati da parti opposte rispetto alla diagonale di estremi (x', y''), (x'', y').

Dopo ciò è ben chiaro che ogni curva caratteristica ha un punto ed un sol punto in comune con la curva Σ.

Per brevità di scrittura denoteremo con ψ, indifferentemente, la curva caratteristica uscente dal punto $P \equiv (x, y)$ di $\boldsymbol{R}$ e la corrispondente funzione, soluzione dell'equazione differenziale (6). Talvolta, per maggior chiarezza, porremo:

$$\psi = \psi(\xi\,;\, x, y) = \psi(\xi, P)$$

e conseguentemente:

$$\psi(x\,;\, x, y) = y.$$

Il punto d'incontro della ψ con la curva Σ, d'ora innanzi, lo indicheremo sempre con $P_0 \equiv (x_0, y_0)$; sicchè:

$$y_0 = \psi(x_0\,;\, x, y) = \lambda(x_0).$$

Consideriamo ora, come nel numero precedente, l'arco $\sigma_0 \equiv P_0 P$ di caratteristica. di origine P_0. Osservando che qui è:

$$ds = \frac{|\sqrt{b_1^2 + b_2^2}|}{b_1}\, dx,$$

la formola (5) dà:

$$(7)\quad u(x,y) = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\, d\xi}\left[u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\, e^{\int_{x_0}^{\xi} \frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\, d\xi}\, d\xi\right].$$

Dunque: *se esiste nel rettangolo* $\boldsymbol{R}$ *una soluzione* $u(x, y)$ *dell'equazione* (1), *questa soluzione riesce completamente determinata, in* $\boldsymbol{R}$, *mediante la formola* (7), *dai valori che essa assume nei punti* (x_0, y_0) *della curva* Σ.

Vogliamo ora far vedere che *la formola* (7) *rappresenta una funzione continua di* x *e* y *in* $\boldsymbol{R}$. Basterà, evidentemente, limitarsi a dimostrare che sono funzioni continue, nel rettangolo,

Digitized by Google

gli integrali che compariscono nel secondo membro della formola in esame.

Diciamo μ un numero maggiorante, in $\boldsymbol{R}$, il valore assoluto di $\frac{c(x,y)}{b_1(x,y)}$, e $Q \equiv (x^{(1)}, y^{(1)})$ un punto prossimo a P. Per la continuità di questa funzione si ha che ad ogni numero positivo ϵ se ne può fare corrispondere un altro h, tale da aversi:

$$(\alpha) \qquad \left| \frac{c(M)}{b_1(M)} - \frac{c(N)}{b_1(N)} \right| < \epsilon$$

per tutte le coppie (M, N) di punti di $\boldsymbol{R}$, pei quali

$$\overline{MN} < h.$$

Ricordando che $\psi(\xi, P)$ è funzione continua [1] di P in $\boldsymbol{R}$, siamo in grado di affermare che al precedente numero h si può associare un numero positivo k, tale da risultare, per un fissato punto P, e qualunque sia ξ:

$$(\beta) \qquad |\psi(\xi, Q) - (\xi, P)| < h,$$

purchè

$$\overline{QP} < k.$$

Ciò premesso, osserviamo che

$$\left| \int_{x_0^{(1)}}^{x^{(1)}} \frac{c[\xi, \psi(\xi, Q)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, Q)]} d\xi - \int_{x_0}^{x} \frac{c[\xi, \psi(\xi, P)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, P)]} d\xi \right| \leq$$

$$\int_{I(x_0^{(1)}, x_0)} \left| \frac{c[\xi, \psi(\xi, Q)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, Q)]} \right| d\xi + \int_{I(x_0, x)} \left| \frac{c[\xi, \psi(\xi, Q)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, Q)]} - \frac{c[\xi, \psi(\xi, P)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, P)]} \right| d\xi +$$

$$+ \int_{I(x^{(1)}, x)} \left| \frac{c[\xi, \psi(\xi, Q)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, Q)]} \right| d\xi \quad [2].$$

È facile ora convincersi che, al tendere di Q a P, tutti e tre

---

[1] GOURSAT, loc. cit., vol. III.

[2] Per le notazioni cfr. M. PICONE, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, "Circolo Matematico di Catania", 1923, p. 507.

Digitized by Google

gli integrali del secondo membro di questa diseguaglianza tendono a zero.

Invero, cominciando dal primo integrale, abbiamo:

$$\int_{I(x_0^{(1)}, x_0)} \left| \frac{c[\Xi, \psi(\Xi, Q)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, Q)]} \right| d\Xi \leq \mu \mid x_0 - x_0^{(1)} \mid .$$

Al tendere di Q a P, a causa della continuità della funzione $y_0 = \lambda(x_0)$, $x_0^{(1)}$ tende a x_0; e ne segue senz'altro l'asserto (1).

Per quanto riguarda il secondo integrale, osserviamo che se $\overline{QP} < k$, in forza della (β) e della (α) abbiamo:

$$\int_{I(x_0, x)} \left| \frac{c[\Xi, \psi(\Xi, Q)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, Q)]} - \frac{c[\Xi, \psi(\Xi, P)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, P)]} \right| d\Xi \leq \epsilon \mid x - x_0 \mid .$$

Ma ϵ può prendersi piccolo a piacere; dunque l'integrale testè scritto tende a zero col tendere di Q a P. Resta così provata la continuità dell'integrale:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{c[\Xi, \psi(\Xi, P)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, P)]} d\Xi$$

su $\boldsymbol{R}$.

Con considerazioni perfettamente analoghe si dimostra la continuità, su $\boldsymbol{R}$, dell'altro integrale:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f[\Xi, \psi(\Xi, P)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, P)]} e^{\int_{x_0}^{\Xi} \frac{c[\Xi, \psi(\Xi, P)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, P)]} d\Xi} d\Xi .$$

3. — Per potere andare innanzi nell'analisi della formola fondamentale (7), ci è oramai indispensabile sostituire alcune delle ipotesi fatte in precedenza con altre più restrittive, ed aggiungere altre ipotesi al riguardo delle funzioni che figurano sotto i segni di integrale nel secondo membro della formola stessa.

---

(1) Lo stesso può ripetersi, evidentemente, pel terzo degli integrali scritti sopra.

Digitized by Google

Propriamente, manterremo qui immutata l'ipotesi (1), e supporremo che le funzioni $\frac{b_2(x,y)}{b_1(x,y)}$, $\frac{c(x,y)}{b_1(x,y)}$, $\frac{f(x,y)}{b_1(x,y)}$ siano dotate di derivate parziali continue e limitate in $\boldsymbol{R}$. Inoltre, ammetteremo che le due funzioni:

$$\omega(x_0) = u[x_0, \lambda(x_0)], \quad y_0 = \lambda(x_0),$$

siano dotate di derivate continue rispetto ad x_0 nell'intervallo (x', x''), e la seconda di queste derivate verifichi la diseguaglianza:

$$\lambda'(x_0) < 0.$$

È chiaro che tutte le ipotesi del numero precedente sono comprese in quelle testè fatte. Perciò sarà, anche qui, soddisfatta la seguente condizione, per noi essenziale: *le caratteristiche dell'equazione* (1) *determinano una corrispondenza univoca e continua tra i punti del rettangolo* $\boldsymbol{R}$ *e quelli della curva* Σ. *Tale corrispondenza è priva di punti eccezionali.*

Inoltre, le ipotesi testè ammesse ci permettono di derivare sotto il segno gli integrali che compariscono nella formola (7).

Infatti, è noto [1] che la funzione $\psi(\xi; x, y)$ possiede, in $\boldsymbol{R}$, derivate parziali prime rispetto ad x e ad y. Dippiù queste derivate sono continue e verificano l'equazione:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{b_2(x,y)}{b_1(x,y)} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Derivando primo e secondo membro della formola (7) rapporto ad y e ad x, abbiamo:

---

[1] Goursat, loc. cit., vol. III, pp. 7-10. Paris, 1915.

Digitized by Google

$$(9)\quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi}\left\{-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\right]d\xi + \frac{\partial x_0}{\partial y}\cdot\frac{c(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\right\}\cdot u(x,y) +$$

$$+ e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi}\left\{\omega'(x_0)\,\frac{\partial x_0}{\partial y} + \int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\right]e^{\int_{x_0}^{\xi}\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi} +\right.$$

$$+\int_{x_0}^{x}\frac{f(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,e^{\int_{x_0}^{\xi}\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi}\,d\xi\left(\int_{x_0}^{\xi}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\right]d\xi - \frac{\partial x_0}{\partial y}\,\frac{c(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\right) -$$

$$\left. - \frac{\partial x_0}{\partial y}\,\frac{f(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\right\},$$

$$(10)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi}\left\{-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\right]d\xi - \frac{c(x,y)}{b_1(x,y)} + \frac{\partial x_0}{\partial x}\,\frac{c(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\right\}\cdot u(x,y) +$$

$$+ e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi}\left\{\omega'(x_0)\,\frac{\partial x_0}{\partial x} + \int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\right]e^{\int_{x_0}^{\xi}\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi}\,d\xi +\right.$$

$$+\int_{x_0}^{x}\frac{f(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,e^{\int_{x_0}^{\xi}\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi}\,d\xi\left(\int_{x_0}^{\xi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\right]d\xi - \frac{\partial x_0}{\partial x}\,\frac{c(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\right) -$$

$$\left. - \frac{\partial x_0}{\partial x}\,\frac{f(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)} + \frac{f(x,y)}{b_1(x,y)}\,e^{\int_{x_0}^{x}\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi}\right\}.$$

Osservando che:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \psi}\,\frac{\partial \psi}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\,,$$

dalle formole (9) e (10) si trae facilmente:

$$(11)\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_2}{b_1}\,\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{b_2}{b_1}\,\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)\left[\frac{c(x_0,y_0)\cdot u(x,y)}{b_1(x_0,y_0)}\,e^{\int_{x_0}^{x}\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi} + \omega'(x_0) -\right.$$

$$\left. - \frac{c(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\int_{x_0}^{x}\frac{f(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,e^{\int_{x_0}^{\xi}\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi}\,d\xi - \frac{f(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\right]e^{-\int_{x}^{x}\frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi} +$$

$$+ \frac{f(x,y)}{b_1(x,y)} - \frac{c(x,y)\cdot u(x,y)}{b_1(x,y)}\,.$$

Digitized by Google

Ponendo mente che

$$\frac{\partial y_0}{\partial x} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{\xi = x_0}, \qquad \frac{\partial y_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{\xi = x_0},$$

dalla (8) segue senz'altro che

$$\frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{b_2}{b_1}\frac{\partial y_0}{\partial y} = 0.$$

Ma, d'altra parte:

$$\frac{\partial y_0}{\partial x} = \lambda'(x_0) \cdot \frac{\partial x_0}{\partial x}, \qquad \frac{\partial y_0}{\partial y} = \lambda'(x_0) \cdot \frac{\partial x_0}{\partial y};$$

dunque è anche:

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{b_2}{b_1}\frac{\partial x_0}{\partial y} = 0.$$

Conseguentemente la (11) riducesi a

$$b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c\,u = f.$$

Si conclude:

Nelle ipotesi fatte in questo paragrafo, la formola (7) *rappresenta l'unica soluzione dell'equazione* (1), *obbligata a prendere su* Σ *i valori* $\omega(x_0)$.

4. — Nei numeri 2 e 3 del presente scritto abbiamo supposto, in tutto R:

$$(12) \qquad b_1(x, y) \neq 0, \qquad b_1(x, y) \cdot b_2(x, y) \geq 0.$$

Ma è evidente che quanto si è detto in quei paragrafi si adatta, parola per parola, al caso in cui, in R, si ha:

$$b_2(x, y) \neq 0, \qquad b_1(x, y) \cdot b_2(x, y) \geq 0.$$

Infatti, basta sostituire l'equazione (4'') all'equazione (4'), e scambiare, anche in tutto il resto, l'ufficio della variabile x con quello della variabile y.

Digitized by Google

Se, invece, in $\boldsymbol{R}$, sono verificate le due condizioni:

$$b_1(x, y) \neq 0\,, \qquad b_1(x, y) \cdot b_2(x, y) \leq 0\,, \tag{13}$$

non si possono più dare sulla Σ, *arbitrariamente,* i valori iniziali della soluzione della (1). Ma, se alla curva Σ si sostituisce la curva *analoga* [1] Σ' di punti terminali (x', y'), (x'', y'') il problema che ci ha occupato, a parità delle altre condizioni, ammette, anche in questo caso, *una soluzione ben determinata, data dalla stessa formola* (7), *ove però in luogo di* $u(x_0, y_0)$ *bisogna porre* $u(x_0', y_0')$.

Da quanto si è detto scaturisce che la necessità di sostituire la curva Σ con la curva Σ', nel passaggio dal caso (12) al caso (13), è di *natura essenzialmente topologica.*

Concludiamo con l'osservare che l'ossatura di questo lavoro resterebbe inalterata se alla curva Σ (Σ') si sostituisse una curva non sempre decrescente (crescente), definita nell'intervallo (x', x''), con gli stessi punti terminali, tutta contenuta in $\boldsymbol{R}$, a condizione però che essa incontri *in un punto ed in uno solo ciascuna curva caratteristica.* Ma riteniamo, che ciò facendo, quello che si guadagna in maggiore generalità si perde in *concretezza.*

5. — Vogliamo, prima di finire, considerare alcuni casi particolari della equazione (1).

Ferme restando le ipotesi fatte nel paragrafo 3, supponiamo, in primo luogo, che si abbia, in $\boldsymbol{R}$:

$$f(x, y) \equiv 0\,.$$

---

[1] Vogliamo con ciò intendere che sulla curva Σ', di equazione $y'_0 = \lambda_1(x'_0)$, si fanno le stesse ipotesi che sulla curva Σ, *salvo una sola eccezione*:

$$\frac{d\lambda_1}{dx_0'} > 0\,,$$

ipotesi che qui vien fatta in luogo dell'altra: $\lambda'(x_0) < 0$.

Digitized by Google

La formola (7) porge immediatamente:

$$u(x, y) = \omega(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{c(\xi, \psi)}{b_1(\xi, \psi)}\, d\xi}.$$

Dunque: *se, nell'intervallo* (x', x''), *è:*

$$\omega(x_0) \equiv 0,$$

la $u(x, y)$ *è identicamente nulla in* $\boldsymbol{R}$, *tanto nel caso* (12) *come nel caso* (13); d'accordo con un teorema segnalato da PICONE.

Facendo, invece, in $\boldsymbol{R}$:

$$c(x, y) \equiv 0,$$

la (7) diviene:

$$u(x, y) = \omega(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi, \psi)}{b_1(\xi, \psi)}\, d\xi.$$

In particolare: *l'integrale dell'equazione:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

determinato dalle solite condizioni iniziali, è dato da:

$$u(x, y) = \omega(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \xi + y - x)\, d\xi.$$

Se il rettangolo $\boldsymbol{R}$ riducesi al quadrato di punti estremi (o, o), (a, a), e per curva Σ si prende la diagonale di punti terminali (o, a), (a, o), la formola precedente assume l'aspetto più concreto:

$$u(x, y) = \omega\left(\frac{a + x - y}{2}\right) - \int_{x}^{\frac{a+x-y}{2}} f(\xi, \xi + y - x)\, d\xi,$$

Facendo analoghe ipotesi al riguardo dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

Digitized by Google

si ottiene la soluzione:

$$u(x, y) = \omega\left(\frac{x+y}{2}\right) - \int_x^{\frac{x+y}{2}} f(\xi, x+y-\xi)\, d\xi .$$

Se, infine, supponiamo ad un tempo:

$$f(x, y) \equiv 0 , \qquad c(x, y) \equiv 0 ,$$

la formola (7) ci dà:

$$u(x, y) = \omega(x_0).$$

In parole: *la soluzione dell'equazione*

$$b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 ,$$

edterminata dalle solite condizioni iniziali, prende su ogni caratteristica un valore costante: quello assegnato a tale soluzione nel punto comune alla detta caratteristica ed alla curva Σ (Σ').

Napoli, 28 febbraio 1929 (VII).

Digitized by Google

A proposito di qualche formola approssimata per la trave inflessa e sollecitata assialmente.

Nota del Socio corrisp. GIUSEPPE ALBENGA
presentata dal Socio naz. resid. Modesto Panetti.

La trave inflessa e sollecitata assialmente ha, come è noto, numèrose applicazioni in alcuni elementi essenziali dell'ossatura dei ponti metallici e dei velivoli. Si sono perciò ideati parecchi metodi di calcolo rapido di tali strutture, sacrificando alquanto la precisione per evitare le lungaggini, a dir vero non eccessive, dello studio di tali elementi con le teorie razionali della scienza delle costruzioni. L'*Air Service Information Circular No. 493* dell'Aeronautica Nordamericana riporta un certo numero di formole approssimate per la trave inflessa e ne discute i risultati applicandole ad un esempio numerico: il calcolo di una campata del longarone di un aeroplano; altre formole raccolgono R. W. Hawken (1), J. Case (2) ed altri autori di lingua inglese.

Una analisi critica di queste formole, che meglio permette di rilevarne la relazione con quelle che si ottengono dalle cosidette teorie esatte, può farsi ricorrendo agli sviluppi in serie trigonometriche da me proposti fin dal 1913 (3) per studiare, fra l'altro, la trave articolata agli estremi, di sezione costante, inflessa da un carico uniforme di intensità p per unità di lunghezza e compressa dal carico assiale P. A questo caso si limi-

(1) R. W. Hawken, *Column Analysis and Design*, Brisbane, 1918.

(2) John Case, *The Strength of Materials*, London, 1925.

(3) G. Albenga, *Su di alcune applicazioni di serie trigonometriche alla determinazione di linee elastiche* in " Atti del R. Istituto Veneto „, 1912-13.

Digitized by Google

tano, o cercano di ridursi con vari accorgimenti, gli Autori delle formole di cui qui voglio trattare.

Facevo vedere nella Nota citata come, scritto il carico ripartito uniforme p sotto la forma:

$$(1) \qquad p = \frac{4}{\pi} p \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x$$

(dove n rappresenta il generico numero dispari), si otteneva, per il caso della flessione pura, per la trave lunga l e con gli ordinari simboli della scienza delle costruzioni, la equazione della linea elastica:

$$(2) \qquad EJy_1 = \frac{4pl^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x.$$

Ne segue subito che il momento flettente nella sezione corrente si può scrivere:

$$(3) \qquad \mathfrak{M}_x = \frac{4}{\pi^3} p l^2 \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x.$$

Quando invece agiva contemporaneamente il carico di compressione P, l'equazione (2) doveva sostituirsi con la

$$(4) \qquad y_2 = \frac{4pl^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left(\frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 EJ - Pl^2} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x,$$

od anche

$$y_2 = \frac{4}{\pi^3} pl^3 \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{n^2\pi^2 \frac{EJ}{l^2} - P} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x,$$

ed osservando che $\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ è il primo carico di Eulero per la trave considerata e indicandolo con P_E,

$$(5) \qquad y_2 = \frac{4}{\pi^3} pl^2 \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{n^2 P_E - P} \operatorname{en} \frac{n\pi}{l} x.$$

Digitized by Google

Per i valori che interessano nei calcoli pratici di resistenza delle strutture le serie (2) e (3) godono di una rapidissima convergenza. In mezzeria della trave, avremo, considerando il solo primo termine dello sviluppo (2):

$$y_1 = f_1 = \frac{4pl^4}{\pi^5 EJ}, \tag{6}$$

valore alquanto più grande di quello esatto $\frac{5}{384}pl^4$.

Il momento flettente in mezzeria $\mathfrak{M}_{\frac{l}{2}}$ sarà dato per la (3) dalla

$$\mathfrak{M}_{\frac{l}{2}} = \frac{4}{\pi^3}pl^2 \tag{7}$$

quando anche ora si limiti lo sviluppo al primo termine. Avremo quindi, detto $(\mathfrak{M})$ il momento esatto $\frac{1}{8}pl^2$:

$$\mathfrak{M}_{\frac{l}{2}} = 1{,}03\,(\mathfrak{M}). \tag{8}$$

Rapidamente converge anche la serie (5) per i punti in vicinanza di quello medio della trave.

Quando agisca anche il carico assiale avremo come momento flettente nella sezione generica:

$$M_x = \mathfrak{M}_x + Py_2$$

e quindi per la (3) e la (5):

$$M_x = \frac{4}{\pi^4}pl^2 \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(1 + \frac{P}{n^2P_E - P}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x = \tag{9}$$

$$= \frac{4}{\pi^3}pl^2 \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n}\,\frac{P_E}{n^2P_E - P} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x.$$

Per la sezione di mezzo avremo, arrestando lo sviluppo al primo termine:

$$M_{\frac{l}{2}} = \frac{4}{\pi^3}pl^2\,\frac{P_E}{P_E - P} \tag{10}$$

Digitized by Google

e per la (8):

$$M_{\frac{l}{2}} = 1{,}03\,(\mathfrak{M})\,\frac{P_E}{P_E - P}. \tag{11}$$

È una formola semplice, la quale ricorda da vicino quella ottenuta per altra via dal Case [1]:

$$M_{\frac{l}{2}} = 1{,}02\,(\mathfrak{M})\,\frac{P_E}{P_E - P}, \tag{12}$$

ed è sempre approssimata per eccesso: l'errore della (11), che è del 3 % per $P=0$, si riduce al 4 per mille per $P = 0{,}985\ P_E$.

Dato il grado di approssimazione dei calcoli statici si può sostituire il valore 1 a quello 1,03 e porre:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M})\,\frac{P_E}{P_E - P}. \tag{13}$$

È questa la nota formola di Perry [2] che gli Inglesi e i Nordamericani impiegano di solito e che è consigliata dai loro regolamenti. Arthur Berry indicò come sia possibile, complicandola alquanto, renderla più approssimata per carichi assiali vicini a quello di Eulero [3].

Se scriviamo la (13) sotto la forma:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M})\,\frac{\frac{P_E}{P}}{\frac{P_E}{P} - 1}$$

ed indichiamo con $\nu = \frac{P_E}{P}$ la *sicurezza contro il carico di punta,* possiamo porre anche:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M})\,\frac{\nu}{\nu - 1} \tag{14}$$

---

[1] John Case, op. cit., pag. 345.

[2] John Perry, *Struts and Tie-Rods with lateral Loads*, in "Philosophical Magazine", I, 1892, pag. 269.

[3] *Handbook for Strength Calculation. Appendix n. 4.*

Digitized by Google

ed otteniamo così la formola di Vianello (1), identica in fondo alla precedente e preferita dagli autori tedeschi.

Se invece trasformiamo la (13) nella

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}}$$

e sostituiamo a P_E il suo valore, avremo la formola di Fidler (2):

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1}{1 - \frac{Pl^2}{\pi^2 EJ}} . \tag{15}$$

La (13), la (14) e la (15) non differiscono fra di loro che per la scrittura; abbastanza approssimate per i bisogni della pratica, dànno valori più vicini al vero che non la formola (11) fino a che $\frac{P}{P_E}$ è inferiore a 0,5; poi con l'avvicinarsi del carico assiale P a quello di Eulero si allontanano alquanto dal valore esatto, ciò che di regola non importa molto, perchè di rado si hanno carichi con tanto scarsa sicurezza contro l'inflessione laterale e perchè l'errore è sempre assai piccolo. Esse sono approssimate per difetto; ma esagerano quelli che per sicurezza ritengono (3) di dover fare:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1.2}{1 - \frac{Pl^2}{\pi^2 EJ}} , \tag{15'}$$

o, come Andrews (4), il quale fonda la sua formola su analogie poco chiare col comportamento di una trave soggetta a momento flettente costante, pongono:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1}{1 - \frac{Pl^2}{8EJ}} . \tag{16}$$

---

(1) Vianello, *Der Eisenbau*, 2ª ediz., pag. 102.

(2) Fidler, *A practical Treatise on Bridge Construction*, pag. 163.

(3) Cfr. la citata nota di R. W. Hawken.

(4) E. Andrews, *Further Problems in the Theory and Design of Structures*, pag. 217.

Digitized by Google

Valori accettabili, per quanto leggermente scarsi, dà invece la formola di Johnson [1]:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1}{1 - \frac{Pl^2}{10EJ}}. \tag{17}$$

La sua grande semplicità l'ha resa di uso corrente nella tecnica americana.

Di segno opposto è l'errore commesso applicando la

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1}{1 - \frac{5}{48}\frac{Pl^2}{EJ}}, \tag{18}$$

che si usa talora per ottenere osservando che è:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) + P\eta_2;$$

dalla quale ponendo per η_2 la espressione:

$$\eta_2 = \frac{5}{48} M_{\frac{l}{2}} \frac{l^2}{EJ},$$

valida quando al momento M_x si attribuisce un andamento parabolico, e risolvendo rispetto ad $M_{\frac{l}{2}}$, si ricava la (18).

Quando $\frac{5}{48}\frac{P}{EJ}$ sia abbastanza piccola perchè sia lecito trascurarne il quadrato, la (18) dà:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M})\left(1 + \frac{5}{48}\frac{Pl^2}{EJ}\right) = (\mathfrak{M}) + Pf_1, \tag{19}$$

se con f_1 indichiamo la freccia di inflessione dovuta al carico trasversale; otteniamo cioè la espressione del momento che si avrebbe applicando semplicemente la sovrapposizione degli effetti e trascurando le deformazioni dovute al carico assiale.

---

[1] J. B. Johnson, C. W. Bryan, F. E. Turneaure, *Modern framed structures*, II, pag. 520. New-York, Wiley, 1926.

Digitized by Google

Le formole riportate più sopra offrono, di fronte alla soluzione esatta:

$$(20) \qquad M_{\frac{l}{2}} = \frac{EJp}{P}\left(\sec\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,\frac{l}{2} - 1\right) = p\,\frac{l^2}{\pi^2}\,\frac{P_E}{P}\left(\sec\sqrt{\frac{P}{P_E}}\cdot\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

il vantaggio di essere relazioni algebriche di facile calcolo, che lasciano agevolmente intravedere l'andamento della funzione che esse simbolizzano. Non hanno invece ragione di essere le formole che, senz'essere esatte, contengono le stesse funzioni trascendenti della soluzione rigorosa o quelle inutilmente complicate qualche volta ancor meno approssimate di quelle che si ricordarono, che sono contenute nelle opere citate in principio di questo studio.

Torino, aprile 1929.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 5 Maggio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci: PEANO, GUIDI, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, PANETTI, PONZIO, POCHETTINO, BOGGIO, GARELLI, VALLAURI e il Segretario REPOSSI;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: BRONDI, VIDARI, CIAN, LUZIO, SOLARI e il Segretario FAGGI.

Scusano l'assenza il Vice-Presidente DE SANCTIS ed i Soci: D'OVIDIO, SACCO, EINAUDI e PATETTA.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente si compiace di veder presente il Socio SOMIGLIANA e si congratula per la sua guarigione. Il Socio SOMIGLIAAA ringrazia.

Il Presidente invita quindi il Socio POCHETTINO a leggere la sua Relazione per la proposta del conferimento del Premio VALLAURI per le Scienze fisiche nel quadriennio 1923-26. Il Socio POCHETTINO dà lettura della Relazione, che conclude con la proposta di assegnare il premio, diviso in parti eguali, all'ingegnere Alessandro MARCHETTI ed al prof. Enrico PISTOLESI.

Digitized by Google

Non essendosi mossa nessuna osservazione a questa Relazione, si passa, secondo il disposto dello Statuto del Premio, alla votazione. Prendono parte alla votazione tutti i Soci presenti e le proposte della Commissione risultano accettate alla unanimità.

Il risultato viene accolto con applausi.

Il Presidente infine, rispondendo ad una proposta del Socio Cian, assicura che alla notizia dell'assegnazione del Premio Vallauri verrà data la maggior possibile diffusione per mezzo della stampa.

Gli Accademici Segretarii:
Emilio Repossi.
Adolfo Faggi.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 5 Maggio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, GUIDI, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, PANETTI, PONZIO, POCHETTINO, BOGGIO, GARELLI, VALLAURI e il Segretario REPOSSI.

Scusano la loro assenza i Soci: D'OVIDIO e SACCO.

Il verbale della adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente dà lettura di una lettera dell'augusto consocio S. A. R. il Duca degli Abruzzi, nella quale questi ringrazia l'Accademia per l'omaggio resogli in occasione della scoperta delle sorgenti dell'Uebi Scebeli.

Il Socio GUIDI presenta in omaggio all'Accademia gli estratti di due suoi lavori, dal titolo: *Dighe ad arco sperimentali* e *Prove di travi da ponte,* e ne espone brevemente il contenuto.

Il Socio MATTIROLO presenta in omaggio due sue Note estratte dagli "Annali della R. Accademia d'Agricoltura di Torino „, dai titoli: *A proposito della " Circolare ministeriale 10 novembre 1928 „ diretta ai comandi di legione della Milizia forestale sui danni ai boschi di conifere per il commercio degli Alberi di*

Digitized by Google

Natale, e *Le " Scuole ambulanti „ nella propaganda parassiticida e agricola.*

La prima contempla i danni che, annualmente, vengono portati ai boschi non vincolati dai tagli fraudolenti delle conifere per fabbricarne " Alberi di Natale „. Proporrebbe di vietare la pratica di questi " Alberi „ e di tornare invece a quella prettamente italiana e più artistica del " Presepio „.

Nella seconda si prospetta la necessità di adoperare un mezzo moderno di locomozione per la propaganda dell'uso dei parassiticidi, preparando automobili convenientemente attrezzati con cui si potrebbe, con celerità, procedere alle pratiche di disinfezione.

Il Presidente Parona presenta all'Accademia l'omaggio ricevuto dal Ministro della Guerra dei tre volumi delle opere del compianto Socio prof. Francesco Siacci.

A proposito di questo omaggio il Socio Boggio (anche a nome del Socio Somigliana) fa rilevare l'importanza delle opere stesse: " il prof. Siacci „, egli dice, " suo predecessore nella cattedra di Meccanica superiore nell'Ateneo torinese, dotato di larga e profonda cultura matematica, specialmente nelle questioni più elevate della Meccanica, compiè studi assai pregevoli sopra questo ramo delle discipline matematiche, ottenendo risultati che s'impongono alla nostra ammirazione per la loro eleganza e semplicità.

" Essi costituirono il punto di partenza di pregevoli ricerche di altri autori.

" Ma il più alto titolo di gloria di F. Siacci, quello per il quale è ancora oggidì universalmente noto ed apprezzato dagli artiglieri di tutto il mondo, è costituito dalle sue originali e fondamentali ricerche nel campo della Balistica esterna. Egli, dotato, come si disse, di solida cultura matematica, potè comporre, in un corpo organico di dottrina, teorie che prima erano molto imperfette e frammentarie, arricchendole di numerosi ed

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

importantissimi contributi originali, dando loro inoltre un assetto pienamente rigoroso e accessibile ai bisogni della pratica, che gli faceva esclamare con giustificata soddisfazione: ' questa volta la Balistica e la pratica si dànno la mano ' (*).

" Ancora oggidì, molti dei risultati stabiliti dallo Siacci fanno testo negli odierni studi di Balistica „.

Il Socio Grassi presenta, per l'inserzione negli *Atti,* una sua Nota dal titolo: *Sulla resistività dell'alluminio,* e comunica all'Accademia che a risultati perfettamente concordanti con quelli da lui conseguiti sin da diversi anni or sono, sono giunte a questo proposito la Commissione Internazionale riunitasi lo scorso anno a Parigi ed esperienze eseguite in Germania ed in America.

Il Presidente si congratula col Socio Grassi ed al suo plauso si unisce anche il Socio Vallauri, il quale comunica all'Accademia che l'alluminio è stato sostituito al rame per la linea ad alto potenziale che sta costruendosi in Val dell'Isarco e che il Governo Nazionale sta prendendo provvedimenti per favorire in generale questa sostituzione, altamente utile per l'Italia, nelle linee di trasmissione della forza elettrica.

Il Socio Peano presenta una Nota del sig. Vincenzo Marseguerra, intitolata: *Sulle funzioni tayloriane,* per la pubblicazione negli *Atti.*

Vengono infine presentati alla Classe i seguenti volumi giunti in dono all'Accademia:

José Isaac Corral: *Cantidades complejas* (Memorias cientificas de la Direccion de Montes y Minas);

San Luis Catalogue of 15333 stars for the epoch 1910, prepared at the Dudley Observatory (Altany-New York);

(*) Queste ricerche provano, fra altro, di quanta importanza sia la profonda conoscenza della Matematica per gli artiglieri, mentre taluno parla invece di ridurre loro l'insegnamento matematico!

Digitized by Google

HARVEY M. IFALE: *The Genus haplopappus,* ed altri opuscoli pubblicati sotto gli auspici della " Carnegie Institution „ di Washington.

Prima di togliere la seduta il Socio GUIDI prega la Presidenza di sostituirlo quale membro del Consiglio d'Amministrazione, dato il suo trasferimento da Torino a Roma. Il Presidente ringrazia il Socio GUIDI dell'opera da lui prestata fin qui, ed annuncia che la votazione del nuovo membro del Consiglio sarà fatta nella prossima adunanza.

Digitized by Google

LETTURE

Sulla resistività dell'Alluminio.

Nota del Socio nazionale residente GUIDO GRASSI

Negli impianti elettrici da parecchi anni si va estendendo l'uso dell'Alluminio come conduttore, anche per lunghe linee, in luogo del rame. Perciò si è reso necessario di stabilire i valori da adottarsi in pratica dei coefficienti caratteristici che si riferiscono alle proprietà elettriche e meccaniche dell'Alluminio.

La Commissione Elettrotecnica internazionale, interessandosi di ciò, ha incaricato un Comitato speciale di studiare la questione e indicare le norme da seguire in proposito.

L'Accademia sa che io, in seguito a invito del Comitato Elettrotecnico Italiano, mi sono occupato specialmente di determinare la resistività dell'Alluminio e il relativo coefficiente di temperatura. Fu precisamente nel gennaio 1923 che io presentai una Nota a questa Accademia dal titolo: *Resistività dell'Alluminio a diverse temperature.*

Il Comitato di studio della C. E. I. composto di delegati della Francia, della Gran Brettagna, della Germania e degli Stati Uniti, nella sua riunione a Parigi del novembre 1928, stabiliva che la resistività può raggiungere al massimo il valore 2,873 *microhm-centimetro* a 20° C, e questo s'intende per fili non cordati, cioè non presi da un cavo o da una treccia, dove i diversi fili che la compongono sono avvolti ad elica, cioè cordati.

Se invece le misure son fatte su fili presi da cavi o trecce si può ammettere un aumento di 1%, cioè il valor massimo può arrivare a 2,902.

Ora mi piace mettere in evidenza il notevole accordo fra questo valore — 2,873 — stabilito dal Comitato internazionale e quello risultato dalle mie esperienze, che è compreso

tra 2,871 e 2,868

alla temperatura 20° C e che si riferisce ad alluminio al 99,7%.

Digitized by Google

Dove sembra apparire una certa discordanza fra i miei risultati e quelli del Comitato internazionale, è nel valore del coefficiente di temperatura, che il Comitato pone eguale a 0,0040, mentre io trovo valori notevolmente più grandi.

A questo riguardo però bisogna osservare che il Comitato considera come temperatura di regime quella di 20° C e a quella si riferisce il valore della resistività. È quindi da ritenere che anche il valore 0,004 del coefficiente di temperatura si riferisca alla medesima temperatura di 20° C. Allora la differenza dal valore da me trovato è molto piccola, perchè io trovai 0,003934 come coefficiente di temperatura per l'Alluminio a 99,7%.

Nello stesso tempo io trovai che per Alluminio meno puro il coefficiente di temperatura a 20° C diminuisce; per esempio fino a 0,00386 per Alluminio al 98,3%. Viceversa si deve ritenere che per Al. molto puro, oltre il 99,7% il coefficiente di temperatura deve salire oltre 0,003934; cosicchè questo valore risultante dalle mie misure si deve ritenere in perfetto accordo con quello stabilito dal Comitato.

Si può anche osservare che questa piccola differenza in pratica non ha importanza notevole e può essere comodo adottare la cifra semplice 4, in luogo di 3,93...

In epoca posteriore alla riunione del detto Comitato furono eseguite numerose misure di resistività dell'Alluminio, negli Stati Uniti e in Germania.

Negli Stati Uniti il *Bureau of Standards* di Washington ha raccolto i risultati delle misure fatte dalla *Aluminium Company* sui prodotti di un mese, cioè su fili di Alluminio crudo, di dimensioni varie, da 1,68 a 4,78 mm. di diametro. Il numero totale di misure fu 3927; il risultato:

Resistività a 20° C; valor medio = 2,818
„ minimo = 2,794
„ massimo = 2,845.

È noto che la Aluminium Company d'America produce un metallo molto puro, dove la proporzione dell'Al. supera il 99,7%, mentre l'Alluminio da me sperimentato, fornitomi dal *Bureau of Standards* circa 7 anni fa, aveva il titolo 99,66% e bastano piccolissime differenze, di qualche millesimo soltanto, per dar

Digitized by Google

luogo a sensibili differenze nella resistività, e precisamente nel senso che aumentando la purezza diminuisce la resistività. Resta così spiegata e giustificata la piccola differenza fra i risultati delle mie misure e di quelle americane.

Non bisogna dimenticare che quando si parla di resistività dell'Al. si dovrebbe intendere di Al. puro, ma in realtà si tratta sempre di Al. che contiene qualche impurità. Nel caso attuale le impurità possono giungere al 3 per mille, ma devono ritenersi in generale un po' minori.

Le stesse considerazioni si possono estendere al confronto fra le mie misure e quelle del *Reichsanstalt* di Berlino, che appunto nello scorso marzo 1929 eseguì numerose prove su fili di Al. crudo di diametro da 2,5 a 3 mm. I risultati si posson riassumere così:

Resistività a 20° C; valor medio = 2,843
„ minimo = 2,815
„ massimo = 2,880.

Posso adunque concludere affermando che tanto le deliberazioni del Comitato internazionale di studio dell'Alluminio, quanto le numerose misure eseguite negli Stati Uniti d'America e dal Reichsanstalt di Berlino hanno confermato i risultati delle mie esperienze delle quali diedi comunicazione a questa Accademia fin dal gennaio 1923.

S'intende che certe differenze osservate nei valori della resistività saranno probabilmente da attribuire, non soltanto al vario tenore di Alluminio puro, ma anche al processo di preparazione; poichè l'azione meccanica, a cui viene assoggettato il metallo per ridurlo in fili, di diametri diversi, influisce non soltanto sulla resistenza meccanica, ma anche sulla resistività. Mancano per ora i dati sperimentali che sarebbero necessari per riconoscere e scindere gli effetti dovuti alle diverse cause.

Digitized by Google

Sulle funzioni tayloriane.

Nota di VINCENZO MARSEGUERRA (Reggio di Calabria)
presentata dal Socio nazionale residente Giuseppe Peano.

1. — Data una funzione $f(x)$ in un intervallo (a, b), che ammette in (a, b) derivate di qualsivoglia ordine, il CIPOLLA [1] chiama la *funzione* $f(x)$ *tayloriana in* (a, b) se essa non ha, in questo intervallo, alcun zero comune con tutte le sue derivate.

In questa Nota mi propongo di dare qualche proprietà delle funzioni tayloriane, di estendere qualche teorema del CIPOLLA e di dimostrare che le serie di potenze e le funzioni sviluppabili in serie di TAYLOR sono funzioni tayloriane.

2. — **Teorema.** *Se una funzione* $f(x)$, *che ammette in un intervallo* (a, b) *derivate di qualsivoglia ordine, ha infiniti zeri nell'intorno di un punto* λ *di* (a, b), *le sue derivate hanno pure infiniti zeri in quest'intorno e la funzione e le sue derivate hanno uno zero comune in questo punto.*

Sia X l'insieme degli zeri di $f(x)$ in un intorno J di λ. Siccome *l'insieme degli zeri di una funzione continua è un insieme chiuso* e λ è un punto limite di X si ha intanto $f(\lambda) = 0$.

Osserviamo che in uno degli intorni a destra o a sinistra di λ o in tutti e due cadono infiniti punti di X. Supponiamo ad es. che nell'intorno J' a sinistra di λ cadano infiniti punti di X e che sia x_1 uno di questi punti. Abbiamo, per la formula di TAYLOR:

$$f(x_1) - f(\lambda) = (x_1 - \lambda) f'(\xi_1) ; \quad x_1 < \xi_1 < \lambda.$$

[1] M. CIPOLLA, *Analisi algebrica*, 2ª edizione, pag. 356, art. 233 (Capozzi, Palermo).

Digitized by Google

E siccome $f(x_1) = f(\lambda) = 0$ risulta: $f'(\xi_1) = 0$.

Prendiamo ora un punto x_2 di X tale che $\xi_1 \leq x_2 < \lambda$; abbiamo:

$$f(x_2) - f(\lambda) = (x_2 - \lambda) f'(\xi_2) \; ; \quad x_2 < \xi_2 < \lambda.$$

e quindi:

$$f'(\xi_2) = 0.$$

Procedendo in modo analogo si dimostra che esistono infiniti punti di J': $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m, \ldots$ in cui si ha:

$$f'(\xi_m) = 0.$$

Questi punti hanno evidentemente per punto limite λ e siccome l'insieme degli zeri di $f'(x)$ è chiuso, segue che:

$$f'(\lambda) = 0.$$

Dunque, *se una funzione $f(x)$ ha infiniti zeri nell'intorno di un punto λ, la derivata prima ha pure infiniti zeri in quest'intorno e, inoltre, la funzione e la sua derivata hanno uno zero comune in questo punto.*

Applicando questo teorema ripetutamente alla derivata prima di $f(x)$, alla derivata seconda, ecc., si perviene alla dimostrazione del teorema enunciato.

3. — Segue l'importante teorema di CIPOLLA [1]:

Teorema. *Una funzione tayloriana in un intervallo non può avere in questo intervallo quanti si vogliano zeri.*

E infatti se una funzione in un intervallo ha infiniti zeri, detto λ un punto limite di questi zeri, per il teorema dimostrato, λ sarebbe uno zero comune alla funzione e alle sue derivate e perciò la funzione non sarebbe tayloriana.

4. Segue anche il

Teorema. *Se una funzione $f(x)$, che ammette in un inter-*

---

[1] M. CIPOLLA, *Op. cit.*

Digitized by Google

vallo (a, b) derivate di qualsivoglia ordine, ha in un punto λ di (a, b) uno zero multiplo di ordine r, le sue derivate $f'(x), f''(x), \ldots f^{(r)}(x)$ hanno nell'intorno di λ un numero finito di zeri.

Infatti nel punto λ si ha:

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \ldots = f^{(r-1)}(\lambda) = 0\,, \quad f^{(r)}(\lambda) \neq 0\,,$$

e se, ad es., la funzione $f^{(s)}(x)$, con $s \leq r$ avesse nell'intorno di λ un numero infinito di zeri le derivate $f^{(s+1)}(x)$, $f^{(s+2)}(x), \ldots f^{(r)}(x) \ldots$ avrebbero pure nell'intorno di λ un numero infinito di zeri e risulterebbe $f^{(s)}(\lambda) = f^{(s+1)}(\lambda) = \ldots = f^{(r)}(\lambda) = 0$ contro il supposto; dunque la funzione $f^{(s)}(x)$ ha, nell'intorno di λ, un numero finito di zeri.

5. — Per il teorema di CIPOLLA (art. 3) le funzioni tayloriane sono funzioni che hanno, in qualunque intervallo finito, un numero finito di zeri. Non tutte queste funzioni sono tayloriane, ciò dipende dal modo di comportarsi delle funzioni nell'intorno degli zeri. Può essere utile il criterio seguente:

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x)$, che ammetta in un intervallo (a, b) derivate di qualsivoglia ordine e che abbia in (a, b) un numero finito di zeri, sia tayloriana in questo intervallo, è che, nell'intorno di ogni zero λ, diventi infinitesima di un certo ordine r-esimo (con r numero naturale) rispetto ad $(x - \lambda)$.*

La condizione è necessaria. Infatti se $f(x)$ è tayloriana in (a, b) e se λ è uno zero di $f(x)$ di ordine r, si ha:

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \ldots = f^{(r-1)}(\lambda) = 0\,, \quad f^{(r)}(\lambda) \neq 0$$

e risulta, per il teorema di L'HOSPITAL:

$$\text{per } s < r \quad \lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^s} = \lim_{x,\lambda} \frac{f^{(s)}(x)}{s!} = \frac{f^{(s)}(\lambda)}{s!} = 0\,;$$

$$\text{per } s = r \quad \lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^r} = \lim_{x,\lambda} \frac{f^{(r)}(x)}{r!} = \frac{f^{(r)}(\lambda)}{r!} \neq 0\,;$$

e quindi $f(x)$ è infinitesima di ordine r rispetto ad $(x - \lambda)$.

Digitized by Google

La condizione è anche sufficiente. Infatti se per ogni zero λ esiste un numero naturale r tale che:

$$\lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^r} = k \quad \text{con} \quad k \neq 0 ,$$

risulta:

$$per \quad s < r \quad \lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^s} = \lim_{x,\lambda} \left\{ \frac{f(x)}{(x-\lambda)^r} (x-\lambda)^{r-s} \right\} = 0 ;$$

e siccome

$$per \quad s \leq r \qquad \lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^s} = \frac{f^{(s)}(\lambda)}{s!}$$

abbiamo:

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \ldots = f^{(r-1)}(\lambda) = 0 , \quad f^{(r)}(\lambda) = k \,.\, r ! \neq 0 .$$

La funzione $f(x)$ è dunque tayloriana in (a, b).

6. — Come applicazione di questo teorema osserviamo che la funzione $f(x)$, considerata da CAUCHY, che si può definire, in un intervallo che comprende il punto zero, ponendo:

$$per \; x = 0 \qquad f(0) = 0 ;$$

$$per \; x \neq 0 \qquad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

non è tayloriana nell'intervallo considerato.

Infatti si ha, per la regola di L'HOSPITAL [1]:

$$\lim_{x,0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \lim_{x,0} \frac{x^{-n}}{\frac{1}{e^{x^2}}} = \lim_{x,0} \frac{n x^{-n+2}}{\frac{1}{2 \,.\, e^{x^2}}} .$$

---

[1] DINI, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Vol. I, Parte I, pag. 128, art. 93 (Nistri, Pisa).

Digitized by Google

Segue:

$$\textit{per } n \textit{ dispari} \quad \lim_{x,0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \lim_{x,0} \frac{n(n-2)(n-4)\ldots 1 \cdot x}{2^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{1}{x^2}}} = 0;$$

$$\textit{per } n \textit{ pari} \quad \lim_{x,0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \lim_{x,0} \frac{n(n-2)(n-4)\ldots 2}{2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{1}{x^2}}} = 0;$$

e quindi in ogni caso:

$$\lim_{x,0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0.$$

La funzione di CAUCHY per $x = 0$ diventa infinitesima di ordine superiore ad n, qualunque sia n, e quindi non è funzione tayloriana in qualunque intervallo (a, b) che comprenda il punto *zero*.

Come è noto e come si può ricavare dalle considerazioni precedenti per la funzione di CAUCHY si ha per $x = 0$:

$$f(0) = f'(0) \ldots\ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 0.$$

7. — Passiamo ora a ricercare una classe importante di funzioni tayloriane. Abbiamo il

Teorema. *Una serie di potenze, non identicamente nulla, è una funzione tayloriana in ogni intervallo finito interno all'intervallo di convergenza.*

Sia data la serie di potenze:

$$\sum_0^\infty a_k (x - x_0)^k$$

e sia $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ l'intervallo di convergenza. Indichiamo con $f(x)$ la somma della serie in un intervallo finito (a, b), interno a $(x_0 + \rho, x_0 - \rho)$. Possiamo scrivere, per $a \leq x \leq b$:

$$f(x) = \sum_{0,k}^\infty a_k (x - x_0)^k;$$

$$f^{(n)}(x) = n! \sum_{0,k}^\infty a_{n+k} (x - x_0)^k \quad (n = 1, 2, \ldots\ldots).$$

Digitized by Google

Ammettiamo che la funzione $f(x)$ non sia tayloriana in (a, b), cioè ammettiamo che esista qualche punto λ di (a, b) tale che:

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = f''(\lambda) = \ldots = f^{(n)}(\lambda) = \ldots = 0.$$

Per le proprietà delle serie di potenze si ricava subito che si ha anche:

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = \ldots = 0.$$

Inoltre:

$$f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots\ldots);$$

quindi:

$$a_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots\ldots).$$

Resta così dimostrato che la serie data, nell'ipotesi che $f(x)$ non sia tayloriana in (a, b), è identicamente nulla. Dunque se la serie non è identicamente nulla in (a, b) la somma della serie $f(x)$ è tayloriana in (a, b) [1].

8. — Dal teorema dimostrato segue l'altro:

Teorema. *Una funzione, non nulla, sviluppabile in serie di* TAYLOR *in un dato intervallo, è una funzione tayloriana (nel senso di* CIPOLLA).

Questo teorema si può enunciare nel modo seguente:

Condizione necessaria che una funzione non nulla sia sviluppabile in serie di TAYLOR, *in un dato intervallo, è che la funzione sia tayloriana in questo intervallo.*

Osserviamo che *la condizione non è sufficiente.* Infatti, ad es., se $f(x)$ è la somma di una serie di potenze convergente in un certo intervallo, la funzione

$$\varphi(x) = f(x) + e^{-\frac{1}{x^2}},$$

---

[1] Osserviamo che resta anche dimostrato il

Teorema. *Se due serie di potenze hanno per somme due funzioni tali che in un punto, dell'intervallo comune di convergenza, esse e tutte le loro derivate sono ordinatamente uguali, le somme delle serie sono uguali in tutto l'intervallo comune.*

Digitized by Google

ove $e^{-\frac{1}{x^2}}$ per $x = 0$ abbia il valore 0, è una funzione tayloriana in qualunque intervallo interno all'intervallo di convergenza della serie, non sviluppabile in serie di TAYLOR in intervalli che comprendono il punto zero.

9. — Dal teorema precedente segue l'altro:

Teorema. *La somma, la differenza, il prodotto di funzioni sviluppabili in serie di* TAYLOR *in un dato intervallo sono funzioni tayloriane in questo intervallo.*

Il quoziente di due funzioni sviluppabili in serie di TAYLOR *in un dato intervallo, in cui la funzione divisore non ha zeri, è funzione tayloriana nell'intervallo comune agli intervalli in cui sono sviluppabili la funzione dividendo e la reciproca della funzione divisore.*

Ad es., la funzione $\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ è funzione tayloriana in qualunque intervallo interno all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

10. — Il CIPOLLA [1] dimostra il teorema seguente:

Teorema. *Se $f(x)$ è una funzione tayloriana in (a, b) ed ha nel punto λ di (a, b) uno zero r-uplo, esiste una ed una sola funzione $\varphi(x)$, tayloriana in (a, b), tale che sia*

$$f(x) = (x - \lambda)^r \varphi(x)$$

e tale che ogni zero di $f(x)$, diverso da λ, sia zero di $\varphi(x)$ di uguale multiplicità e viceversa.

Modifichiamo la dimostrazione che diede il CIPOLLA nel modo che segue:

Definiamo la funzione $\varphi(x)$ ponendo in (a, b):

$$\text{per } x \neq \lambda \qquad \varphi(x) = \frac{f(x)}{(x - \lambda)^r};$$

$$\text{per } x = \lambda \qquad \varphi(\lambda) = \frac{f^{(r)}(\lambda)}{r!}.$$

---

[1] M. CIPOLLA, *Op. cit.*, pag. 357, art. 233; 2.

Digitized by Google

Dimostriamo che la funzione $\varphi(x)$ è continua anche per $x = \lambda$. Infatti, per il teorema di L'Hospital, si ottiene:

$$\lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^r} = \lim_{x,\lambda} \frac{f^{(r)}(x)}{r!} = \frac{f^{(r)}(\lambda)}{r!}.$$

Dimostriamo ora che la funzione $\varphi(x)$ è tayloriana in (a, b) e facciamo prima vedere che $\varphi(x)$ ha in (a, b) derivate di qualunque ordine n.

Si ha intanto, per $x \neq \lambda$:

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_0^n{}_k \binom{n}{k} D^k \left[\frac{1}{(x-\lambda)^r}\right] f^{(n-k)}(x) =$$

$$= \sum_0^n{}_k (-1)^k k! \binom{n}{k} \binom{r+k-1}{k} \frac{f^{(n-k)}(x)}{(x-\lambda)^{r+k}} =$$

$$= \frac{\sum_0^n{}_k (-1)^k k! \binom{n}{k} \binom{r+k-1}{k} f^{(n-k)}(x) (x-\lambda)^{n-k}}{(x-\lambda)^{r+n}}.$$

E ponendo:

$$f_n(x) = \sum_0^n{}_k (-1)^k k! \binom{n}{k} \binom{r+k-1}{k} f^{(n-k)}(x) (x-\lambda)^{n-k},$$

si ottiene, sempre per $x \neq \lambda$:

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{f_n(x)}{(x-\lambda)^{r+n}}.$$

Per dimostrare che $\varphi^{(n)}(x)$ ammette la derivata anche per $x = \lambda$ consideriamo la derivata di $f_n(x)$ di ordine t; abbiamo:

$$f_n^{(t)}(x) = \sum_0^n{}_k (-1)^k k! \binom{n}{k} \binom{r+k-1}{k} D^t [f^{(n-k)}(x) (x-\lambda)^{n-k}] =$$

$$= \sum_0^n{}_k (-1)^k k! \binom{n}{k} \binom{r+k-1}{k} \cdot$$

$$\sum_0^t{}_p \binom{t}{p} f^{(n-k+t-p)}(x) \left\{ p! \binom{n-k}{p} (x-\lambda)^{n-k-p} \right\},$$

Digitized by Google

con la convenzione che sia:

$$\left\{ p!\binom{n-k}{p}(x-\lambda)^{n-k-p} \right\} = 0 \qquad \text{per} \quad n-k-p<0\,.$$

Se poniamo ora $x=\lambda$, il fattore $p!\binom{n-k}{p}(x-\lambda)^{n-k-p}$ è nullo per i valori di p, tali che $n-k-p \neq 0$ ed è uguale a $(n-k)!$ per $n-k-p=0$; quindi risulta:

$$f_n^{(t)}(\lambda) = n!\sum_0^n{}_k (-1)^k \binom{r+k-1}{k}\binom{t}{n-k} f^{(t)}(\lambda).$$

Ma si ha [1]:

$$\sum_0^n{}_k (-1)^k \binom{r+k-1}{k}\binom{t}{n-k} = \binom{t-r}{n};$$

quindi:

$$f_n^{(t)}(\lambda) = n!\binom{t-r}{n} f^{(t)}(\lambda).$$

È facile ora vedere che $f_n(x)$ ha nel punto λ uno zero almeno di ordine $r+n$. Infatti si ha:

$$\text{per} \quad t<n+r \qquad f_n^{(t)}(\lambda)=0\,,$$

$$\text{per} \quad t=n+r \qquad f_n^{(t)}(\lambda) = n!\,f^{(r+n)}(\lambda).$$

Ciò posto, per il teorema di L'Hospital, si ottiene:

$$\lim_{x,\lambda}\varphi^{(n)}(x) = \lim_{x,\lambda}\frac{f_n(x)}{(x-\lambda)^{r+n}} = \lim_{x,\lambda}\frac{f_n^{(n+r)}(x)}{(r+n)!} = \frac{n!\,f^{(r+n)}(\lambda)}{(r+n)!}\,,$$

e quindi $\varphi(x)$ ammette anche nel punto λ derivate di qualunque ordine.

Si dimostra, infine, facilmente che ogni zero di $f(x)$, diverso

---

[1] V. Marseguerra, "Giornale di Matem. e Fis. della Scuola Media", a. II, n. 7-8.

Digitized by Google

da λ, è zero di $\varphi(x)$ di uguale multiplicità e viceversa. La funzione $\varphi(x)$ è dunque tayloriana in (a, b) come $f(x)$.

11. — A conferma, naturalmente non necessaria, di questo teorema facciamo l'osservazione seguente:

Se $f(x)$ è sviluppabile in serie di potenze, siccome si ha:

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \ldots\ldots = f^{(r-1)}(\lambda) = 0\,; \quad f^{(r)}(\lambda) \neq 0\,,$$

risulta, per tutti i punti di un intorno conveniente di λ:

$$f(x) = (x-\lambda)^r \sum_0^\infty{}_k \frac{f^{(r+k)}(\lambda)}{(r+k)!}(x-\lambda)^k$$

e quindi:

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty{}_k \frac{f^{(r+k)}(\lambda)}{(r+k)!}(x-\lambda)^k\,.$$

Risulta inoltre:

$$\varphi^{(n)}(x) = n! \sum_0^\infty{}_k \binom{n+k}{n} \frac{f^{(r+n+k)}(\lambda)}{(r+n+k)!}(x-\lambda)^k$$

e quindi:

$$\varphi^{(n)}(\lambda) = \frac{n!\, f^{(r+n)}(\lambda)}{(r+n)!}\,.$$

12. — Il Cipolla [1] inoltre dimostra il

Teorema. — *Se $f(x)$ e $f'(x)$ sono tayloriane in (a, b) ed $f(x)$ ha uno zero nel punto λ di (a, b), allora esiste in (a, b) un intorno a destra di λ (se $\lambda < b$) in ogni punto del quale $f(x)$. $f'(x)$ hanno lo stesso segno, ed esiste un intorno a sinistra di λ (se $a > \lambda$) in ogni punto del quale $f(x)$, $f'(x)$ hanno segno contrario.*

Osserviamo che *questo teorema sussiste anche quando si toglie la condizione che anche $f'(x)$ sia tayloriana.* Infatti per il teorema dell'art. 4 la funzione $f'(x)$ in un intorno di λ ammette un nu-

---

[1] M. Cipolla, *Op. cit*, pag. 360, art. 235.

Digitized by Google

mero limitato di zeri e quindi si può determinare un intorno J di λ in cui $f(x)$ e $f'(x)$ non hanno zeri distinti da λ. Ciò posto, per dimostrare il teorema basta ripetere la dimostrazione del CIPOLLA.

13. — Più in generale sussiste il

Teorema. *Se $f(x)$ è una funzione tayloriana in (a, b) ed $f(x)$ ha uno zero nel punto λ di (a, b) r-uplo, esiste un intorno a destra di λ (se $\lambda < b$) in ogni punto del quale $f(x)$ ha il segno di $f^{(s)}(x)$ con $s \leq r$ ed un intorno a sinistra di λ (se $\lambda > a$) in ogni punto del quale $f(x)$ ha il segno di $f^{(s)}(x)$ o l'opposto, secondo che s è pari o dispari.*

Intanto, per il teorema ora ricordato dell'art. 4, la funzione $f^{(s)}(x)$ in un intorno di λ ammette un numero limitato di zeri e quindi si può determinare un intorno J di λ in cui $f(x)$ e $f^{(s)}(x)$ non hanno zeri distinti da λ.

Se x è un punto di J, diverso da λ, si ha:

$$f(x) = \frac{(x-\lambda)^s}{s!} f^{(s)}(\xi)$$

con ξ compreso fra x e λ e quindi:

se $x > \lambda$ risulta:

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f^{(s)}(\xi) = \operatorname{sign} f^{(s)}(x);$$

se $x < \lambda$ risulta:

$$\operatorname{sign} f(x) = (-1)^s \operatorname{sign} f^{(s)}(\xi) = (-1)^s \operatorname{sign} f^{(s)}(x).$$

14. — Il teorema di ROLLE può allora essere enunciato nel modo seguente:

Teorema. *Due zeri consecutivi di una funzione tayloriana in (a, b) ne comprendono un numero dispari della funzione derivata $(2s+1)$-esima, se gli zeri della funzione sono almeno di ordine $(2s+1)$ e se questa derivata è pure tayloriana nell'intervallo degli zeri.*

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Maggio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, SACCO, POCHETTINO e il Segretario REPOSSI.

Scusa la sua assenza il Socio D'OVIDIO.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio SOMIGLIANA, a nome dell'onor. Gr. Uff. Francesco SOMAINI, presenta in omaggio all'Accademia un esemplare della medaglia coniata a Como in occasione dell'inaugurazione del Tempio voltiano donato dal Somaini stesso alla città natale del Grande Fisico. Egli presenta inoltre in omaggio all'Accademia una copia del *IX Bollettino del Comitato Glaciologico italiano,* di cui è Presidente, e ne illustra brevemente il contenuto, riassumendo in particolar modo i risultati dello studio sintetico del Dott. U. MONTERIN sullo stato attuale dei ghiacciai italiani, tutti in fase di ritiro.

Il Presidente ringrazia vivamente il Socio SOMIGLIANA, riservandosi di inviare direttamente i ringraziamenti dell'Accademia all'onor. SOMAINI.

Digitized by Google

Il Socio Sacco offre all'Accademia una copia delle sue *Note biografiche* del compianto Prof. Alessandro Roccati.

Il Presidente presenta in seguito i seguenti omaggi giunti all'Accademia:

Saggio bio-bibliografico degli Scienziati della Lunigiana, pubblicato dal Comune della Spezia per la I Esposizione Nazionale di Storia della Scienza in Firenze ed inviato dall'ill.mo Podestà della Spezia Conte Generale Saverio Nasalli-Rocca;

Il Museo di Storia naturale e la Facoltà di Scienze fisiche e naturali, opera postuma di Ugo Schiff, pubblicata a cura del Prof. Mario Betti;

Dichiarazione circa le formole naturali per la densità e pressione negli astri, di Enrico De Chaurand.

Il Presidente in seguito si dice lieto di presentare, come dono e omaggio alla R. Accademia per parte del sig. Senatore Conte Eugenio Rebaudengo e perchè sia conservata nell'Archivio dei documenti manoscritti, la corrispondenza epistolare che l'insigne geologo, Sen. Prof. Angelo Sismonda, Suo Nonno venerato, ebbe con illustri geologi e con altre personalità. " Della ricca e preziosa raccolta di lettere, per citare qualche nome, ricorda la corrispondenza, da Berna, con Studer dal 1838 al 1870, da Lione con Fournet (1838-68), le lettere con De-la-Béche, Charpentier, Blainville, Di Saluzzo, Bobbage, Lyell, Macedonio Melloni, le numerose lettere di Matteucci (1842-1868), di Élie de Beaumont (1834-1874), Paolo Savi (1838-1872), di Giacinto Collegno (1837-1851) e qualcuna di Giovanni Plana, congiunto dei Sismonda.

" Basta ricordare questi nomi per segnalare l'importanza del dono e quale fosse la meritata fama di Angelo Sismonda, che appartenne all'Accademia dal 1835 al 1878, e che ne fu Tesoriere e Direttore di Classe. Egli fu Socio contemporaneamente al fratello Eugenio (dal 1843 al 1870), che tenne la carica di Segretario Perpetuo e che illustrò pure il suo nome con lavori

Digitized by Google

classici, fondamentali per la Paleontologia piemontese: degni fratelli, valenti scienziati, che giustamente Torino onorò dedicando al loro nome una Via della Città. Il prof. Angelo Sismonda fu veramente benemerito della Geologia piemontese poichè il suo nome è legato alla pubblicazione avvenuta nel 1862, della *Carta Geologica degli Stati Sardi*, una delle prime Carte regionali comparse, e che ha ancora valore scientifico, anche come espressione grafica di certe concezioni del Sismonda sull'età delle diverse formazioni principali delle Alpi occidentali, che studi più recenti hanno vagliato nella loro importanza e rimessi in parte in valore. Ma il nome del Sismonda è ben noto anche fuori del campo strettamente geologico, per la parte di primaria importanza, ch'Egli ebbe negli studi preparatori alla grande impresa della Galleria del Fréjus, concretati in un profilo geologico del tracciato della Galleria, che i lavori dimostrarono corrispondente al vero. Nel 1922 il compianto Prof. Roccati, a commemorare le nozze d'argento di due pronipoti di Angelo Sismonda, pubblicò un volumetto, per iniziativa della N. D. Emilia Fornaris-Rebaudengo, e con prefazione del nostro Consocio Sen. Vittorio Cian, diretto a far conoscere e illustrare in buona parte l'epistolario, che ora viene ad arricchire il nostro Archivio; ma ho motivo per credere, dice il Presidente, che l'epistolario stesso può offrire altro interessante materiale di ricerche agli studiosi del tempo, che A. Sismonda e i suoi illustri corrispondenti onorarono con la loro attività scientifica. Uno dei più apprezzati ornamenti del nostro Museo Geologico è un espressivo busto marmoreo di Angelo Sismonda, dono generoso del nipote affezionatissimo Sen. Conte Rebaudengo. Ora egli rende un nuovo omaggio alla venerata memoria del suo Avo illustre donando alla R. Accademia una ricca serie di lettere, nella quale sta la più convincente prova dell'alta considerazione che godeva A. Sismonda nel mondo degli scienziati e dei dotti.

" Sono sicuro di interpretare il desiderio dei Colleghi rinno-

Digitized by Google

vando ora anche a nome loro, i più vivi ringraziamenti al Sen. Conte Rebaudengo per il prezioso e generoso dono, che sarà gelosamente conservato nell'Archivio nostro, come lo era dai nipoti, a memoria dell'illustre nostro Socio ed a vantaggio degli studiosi „.

Il Presidente presenta inoltre la fotografia di una pregevole stampa col ritratto del fondatore della R. Accademia, Re Vittorio Amedeo III, ottenuta per cortese interessamento del Socio Mattirolo.

Passando in seduta privata, presenti tutti i Soci sunnominati, si procede alla votazione per la nomina di un delegato di Classe nel Consiglio d'Amministrazione, in sostituzione del Socio Guidi trasferito a Roma. Risulta eletto il Socio Pochettino, con voti 8 su nove votanti.

Digitized by Google

PREMIO DI FONDAZIONE GAUTIERI

Storia (1925-1927)

Onorevoli Colleghi,

La Commissione incaricata di riferire intorno al Premio Gautieri (triennio 1925-27) ha preso atto che si erano presentati al Concorso, con le opere che saranno in seguito esaminate, i signori professori Gennaro Maria Monti, Luigi Pareti, Nello Rosselli, Pietro Silva.

La Commissione, esaminando poi la produzione scientifica del triennio ha creduto, come era in sua facoltà, di prendere in considerazione, in aggiunta a quelli presentati al Concorso dagli autori, due opere pubblicate dal prof. A. C. Jemolo durante il triennio.

In Gennaro Maria Monti (*Due grandi riformatori del '700, A. Genovese e G. M. Galanti*, 1926; *Dal Duecento al Settecento*, 1925; *Le Confraternite medievali dell'alta e media Italia*, 1927; *Istituzioni ed associazioni romane in Italia ed in Francia durante l'alto medio evo*, 1927; *Sparano da Bari*, 1927; *La marina mercantile ed il commercio marittimo napoletano nel secondo periodo borbonico*, 1927; *Il monastero benedettino di Santa Maria ad Agnone in Napoli*, 1925; ecc.) è notevole e anche lodevole una instancabile attività, che lo ha spinto ad indagare tutti gli aspetti della cultura italiana, non solo nel campo della giurisprudenza ma anche in quello delle lettere. La sua produzione scientifica, può forse perfino considerarsi come esuberante. Poichè, se i suoi lavori

Digitized by Google

sono inappuntabili per la larga informazione, per la conoscenza diretta delle fonti, e per la copia dei risultati, lasciano però ancora alquanto a desiderare per la fermezza della costruzione. Il che si rileva sopratutto nei lavori, nei quali egli ha affrontata la storia, non solo più della letteratura giuridica o della giurisprudenza, ma di alcuni particolari istituti. Il più importante de' suoi libri, quello relativo alle *Confraternite medioevali italiane,* ch'è certo un prezioso contributo espositivo delle origini e dello sviluppo di tali singolari forme della vita religiosa e anche civile italiana, non ci dà però una discriminazione così netta dei varî tipi di Confraternite e una determinazione così completa ed esatta dei loro rapporti con le altre istituzioni ecclesiastiche e civili, come forse si sarebbe potuto desiderare. Ad ogni modo, il giovine autore è meritevole di sincero encomio e d'ogni migliore incoraggiamento.

Il prof. Luigi Pareti, stabile di Storia antica nella R. Università di Firenze, già noto per altri lavori pregevoli per acume critico e dimostranti larga cultura nel campo della Antichità classica, ha entro questo triennio pubblicato un volume dal titolo: *Le origini etrusche*: 1° Le leggende e i dati della scienza (Pubblicazioni della R. Università di Firenze, Sez. di Filologia e Filosofia, N. S., vol. IX), Firenze, Bemporad, 1926. Il volume è diviso in due parti; la prima concernente le leggende sulle origini etrusche; la seconda le origini etrusche in relazione coi dati della archeologia, della filologia e della storia. La prima parte è un vero modello di esame critico di un complesso di tradizioni. L'autore non studia queste tradizioni isolatamente, ma le mette in relazione per saggiarne il valore con le altre pervenuteci nelle stesse condizioni e per mezzo delle stesse fonti. Gli riesce così assai facile il dimostrare che le narrazioni di Erodoto e d'Ellanico e dei loro successori, al pari d'altre tradizioni tramandateci dalle stesse fonti con la stessa sicurezza e con varianti più o meno analoghe, non sono tradizioni vere, ma congetture più o meno arbitrarie di scrittori greci, i quali dànno per sicuro ciò che è induzione loro o dei loro coetanei, su dati assai incerti di toponomastica, su somiglianze più o

Digitized by Google

meno bene osservate di costumi, su genealogie più o meno arbitrarie e fantastiche. Ad esse si contrappone nettamente la tradizione indigena che può con sufficiente certezza ricostruirsi pure attraverso le alterazioni degli eruditi greci e latini che ce l'hanno trasmessa. Questa tradizione muove dalla autoctonia del popolo etrusco nella Toscana. Essa certamente non ha per sè maggior valore delle tradizioni che consideravano come autoctoni i Greci in Arcadia o nell'Attica. ma ci dimostra ad ogni modo, che gli Etruschi non conservavano alcun preciso ricordo della loro pretesa migrazione per mare dall'Oriente e si concilia assai bene con la ipotesi della loro migrazione antichissima nella regione alpina e della formazione progressiva della loro civiltà in Italia. Studia poi il Pareti accuratamente gli argomenti linguistici, storici, archeologici e culturali, che sono stati addotti a conferma della provenienza orientale degli Etruschi. La sua analisi non convincerà certamente tutti, ma tutti dovranno riconoscerne l'acutezza e il rigore metodico, seppure qualche riserva è giusto forse fare per la parte linguistica. Segue nella seconda parte del volume, un tentativo di dimostrazione della tesi che gli Etruschi giunsero nella Toscana dall'Italia settentrionale, e che essi vi pervennero portando con sè la civiltà cosiddetta Villanoviana. La tesi non è nuova ma è precisata in varî punti di notevole rilievo ed è avvalorata mediante una disamina accuratissima di tutti i dati e in particolare di quelli forniti dalle nuove scoperte archeologiche. Se anche non tutti converranno che il problema etrusco sia qui risoluto, tutti apprezzeranno lo studio sagace delle civiltà preistoriche che si svolsero nell'Italia settentrionale e centrale. In ciò, come nella analisi fatta con mirabile sagacia dei dati tradizionali, sta il guadagno positivo che il libro del Pareti reca alla scienza, guadagno del quale dovranno tener conto anche quelli che non accettino la sua tesi fondamentale.

Nello Rosselli esordisce negli studi storici con un bel volume su *Mazzini e Bakounine* (Torino, Bocca, 1927), attorno al cui drammatico duello, fatalmente concluso con la sconfitta delle idealità più elevate religiose-morali e col trionfo delle più torbide

Digitized by Google

eccitazioni sociali, ha raggruppato la storia di 12 anni (1860-1872) gravidi di destino pel movimento operaio in Italia.

Al tema felicemente scelto s'è accinto l'A. con solida preparazione, con vaste indagini in Italia e all'estero: n'è uscita una monografia ben disegnata, ben scritta con grande freschezza di lingua, che a parte inevitabili divergenze di apprezzamenti politico-religiosi ha reale valore storico. Merita dunque il più largo favore — considerando la scarsezza di studi scientificamente condotti sul movimento italiano operaio dell'Ottocento — e costituisce una splendida promessa pe' futuri lavori, co' quali l'A. si prefigge di " riprendere il filo della narrazione per condurla almeno fino alle soglie del secolo ventesimo „.

Pietro Silva s'è presentato al concorso con tre pubblicazioni: un profilo, della collezione Formiggini, su Napoleone I; uno studio, comparso nella " N. Rivista storica „, *sulla politica di Napoleone III in Italia;* un volume (Mondadori) sul *Mediterraneo dall'unità di Roma all'unità d'Italia.*

La figura di Napoleone I, tratteggiata con vigore, attesta le qualità eccellenti, espositive e sintetiche, dell'A.; ma condotto com'è sulla scorta delle maggiori opere della letteratura napoleonica, specialmente del Vandal e del Sorel, il lavoro nulla può recare d'originale, e rientra nel numero delle buone lezioni universitarie, o se vuolsi delle brillanti conferenze divulgative.

Lo studio sulla politica italiana di Napoleone III, se a ragione reagisce contro apologetiche esagerazioni, incorre d'altra parte a sua volta in apriorismi, non tenendo conto abbastanza che l'azione personale del Sovrano era sempre vincolata ai doveri e alle necessità imperiose di conservazione della dinastia, alle costanti direttive della politica francese.

Al volume su *Il Mediterraneo dall'unità di Roma all'unità d'Italia* (1927) fa d'uopo tributare lode per la scelta dell'argomento, la larghezza critica delle ricerche, la quale ha consentito all'autore di illuminare vivamente e rigorosamente l'importanza del grande mare interno attraverso a due millenni di storia, per la eloquente sobrietà, che gli ha consentito di sintetizzare un così ampio seguito di avvenimenti memorandi attorno al perno cen-

Digitized by Google

trale da lui scelto. L'A. non vuole discutere, ad imitazione del Mahan, il problema se ed in che misura il dominio del mare abbia dato la vittoria agli Stati che si affacciano sul Mediterraneo; od almeno questo problema è visto subordinatamente all'altro: quale fu l'influenza che il desiderio di dominare il Mediterraneo o di partecipare al dominio su di esso ebbe nel determinare guerre, alleanze, lotte tra le potenze mediterranee; e perchè quel desiderio di dominio sul Mediterraneo crebbe, si illanguidì e tornò a farsi vivo nelle successive epoche storiche?

Come in tutti i libri somiglianti per l'impostazione del problema, anche in questo non sempre riesce all'autore di limitare la narrazione o la discussione ai problemi attinenti ed agli avvenimenti in effetto collegati causalmente col mare Mediterraneo. Quando, come succede per il libro del Silva, le diversioni non necessarie sono tuttavia ridotte al minimo, all'opera non si può muovere il rimprovero di unilateralità; anzi bisogna riconoscere il merito di attirare l'attenzione, con voluto silenzio sugli altri fattori, su quel fattore importantissimo di storia che è stato ed è senza dubbio il mare.

Negli *Elementi di diritto ecclesiastico* di Arturo Carlo Jemolo (Firenze, Vallecchi, 1927) è contenuta una trattazione, la quale, notevole di già per alcuni suoi pregi di sistematica e di dogmatica giuridica, si raccomanda agli studiosi della storia del nostro paese, perchè, primo fra i libri di tal genere, ha stimato di far luogo ad una abbastanza ampia esposizione storica, che traccia i " Lineamenti delle relazioni fra lo Stato e la Chiesa in Italia dalla fine del Settecento ai giorni nostri „ (pp. 209-255). Esposizione che, opportuna sempre, presenta ora — come ognuno intende — un carattere di tutta speciale utilità di fronte alla nuovissima regolamentazione di tali rapporti nel nostro paese.

A scrivere il libro intitolato *Il Giansenismo in Italia prima della Rivoluzione* (Bari, Laterza, data interna, 1927), lo Jemolo si era preparato di lunga mano saggiando per ogni verso il terreno, pressochè inesplorato ed eccezionalmente scabroso, con una serie di studi particolari, a cominciare dal suo libro giovanile *Stato e Chiesa negli scrittori politici italiani del Seicento e del Settecento.*

Digitized by Google

L'opera presente è quindi il risultato di lunghe indagini pazienti, di una assidua, intensa meditazione, e — questo merita di essere fin d'ora segnalato — di un intimo travaglio d'anima, di fronte a un contrasto, che lo Jemolo definisce a buon diritto " eterno „, perchè rivive, sia pure mutato di aspetti e di nomi, ad ogni crisi della spiritualità cristiana.

Tant'è vero che uno dei pregi principali di quest'opera è di avere dimostrato che il Giansenismo italiano non consistette semplicemente in un rapido dilagare della corrente transalpina, rimasta da noi alla superfice, perchè mancante di una qualunque polla alimentatrice nel sottosuolo, se così possiamo dire, del sentimento religioso nazionale, ma ebbe nell'Agostinianismo rigido un precursore e quasi preparatore. Poichè, come giustamente rileva lo Jemolo, " l'Agostinianismo rigido non diede poi manifestazioni notevoli di vita fuori d'Italia: si può dire che fu movimento tutto localizzato presso la curia generalizia dell'Ordine, nel convento di via della Scrofa „.

La nota più saliente e davvero caratteristica del lavoro dello Jemolo è questa. La polemica in favore o in odio del Giansenismo, una delle più fiere che la storia ecclesiastica ricordi, si può dire spenta. Da ultimo, almeno presso gli studiosi laici, era venuto prevalendo quello, che possiamo designare, tanto per intenderci, quale il punto di vista o l'indirizzo del Sainte-Beuve. E cioè un guardare il grande moto dal di fuori, con un interessamento essenzialmente intellettuale se anche soffuso di quella simpatia, che ogni animo non opaco o non ostruito da preconcetti o pregiudizi non può non provare di fronte a qualunque fede sincera, disinteressata od eroica. Un passo innanzi per questa via lo è venuto segnando da ultimo il Laporte, integrando quel capolavoro di superiore dilettantismo, se la parola non è troppo forte, quel portento di intuizione e di penetrazione dal di fuori, che è l'opera famosa del Sainte-Beuve su Port-Royal, con una indagine internatasi in tutti i meandri della teologia giansenistica. Lo Jemolo va ancora più in là. Egli ha scrutato, sì, il grandioso fenomeno con occhio sgombro da ogni prevenzione confessionistica; lo ha approfondito, senza esclusivismi, con l'aiuto di tutti quei mezzi di ricerca che la scienza gli po-

Digitized by Google

teva fornire. Ma la sua qualità di credente, la sua fede profonda, fermissima e sensibilissima gli hanno consentito di sentire ciò, che ai semplici spettatori poteva sfuggire, e cioè l'eco, la vibrazione di quei dolorosi laceramenti interni (com'egli li dice nel suo maschio stile concettoso), che tante anime pie hanno provato nell'eterno contrasto. Questo costituisce non solo il carattere differenziale, ma il pregio particolare e anche il fascino di questo libro.

E ne ha determinato anche la forma. Lo Jemolo ha evitato ogni eccesso di apparato dottrinario o anche semplicemente bibliografico, tanto facile in un argomento, ove la letteratura è così abbondante e quasi ingombrante. Egli va diritto ai concetti, alle loro derivazioni e concatenazioni. Ciò fa che l'opera dello Jemolo si possa designare, a nostro avviso, come il contributo più notevole, che da parte laica si sia dato a quella storia, più spiccatamente nazionale e più a noi prossima, del sentimento religioso, che è nei voti di tutti gli studiosi e che colmerebbe un po' la distanza fra la nostra letteratura e il più delle straniere, ricche a questo riguardo di opere eccellenti ed imponenti.

Tale è del resto il giudizio che la critica ha dato ormai di quest'opera, la quale (dice uno studioso competentissimo) " è indubbiamente la prima organica e quadrata storia del giansenismo italiano. Lo Jemolo, per copia di informazioni, per sicurezza di giudizi, per preparazione metodologica, per abilità di espositore, si lascia di gran lunga indietro quanti, da presso o da lontano, si sono occupati di argomenti consanguinei al suo..... Alcune sue pitture personali, quella del Concina, ad esempio, e quella del malcapitato de' Ricci, hanno il sapore di vere opere d'arte ".

L'esame analitico compiuto dalla Commissione la persuase che tra le opere per varii rispetti pregevoli e degne di lode, sulle quali l'attenzione sua è stata richiamata, spiccassero per la larga, paziente, accuratissima indagine, per il rigore del metodo, per l'importanza dei risultati acquisiti alla scienza storica gli scritti dello Jemolo e del Pareti. Parve difficile alla Commissione lo stabilire tra i lavori attinenti ad epoche ed a pro-

Digitized by Google

blemi così profondamente lontani e diversi una graduatoria di merito. Cosicchè, non potendo dare la palma ad un'opera sola, la Commissione è venuta unanime nel divisamento di proporre all'Accademia la divisione del premio Gautieri di storia per il triennio 1925-927 in parti uguali fra i professori Arturo Carlo Jemolo e Luigi Pareti.

Torino, 18 maggio 1929.

La Commissione:

Gaetano De Sanctis, *Presidente.*
Alessandro Luzio.
Federico Patetta.
Francesco Ruffini.
Luigi Einaudi, *Segretario e Relatore.*

Digitized by Google

PREMIO DI FONDAZIONE GAUTIERI

Filosofia (1924-1926)

Illustri Colleghi,

Al Premio Gautieri, da assegnarsi alla migliore opera di Filosofia, compresa la storia della filosofia, pubblicata in Italia nel triennio 1924-1925-1926, dichiararono formalmente di concorrere, inviando loro pubblicazioni, i signori:

Vittorio Marchi, con uno studio su *Le prove dell'esistenza di Dio,* Prolusione al Corso pareggiato di Filosofia (Roma, 1926, pagg. 48).

G. M. De Caria, con uno studio dal titolo: *Identità o contraddizione?* (Palermo, 1925, pagg. 99).

G. Galli, con un volume dal titolo: *Spirito e realtà, Studio di filosofia come positivismo spiritualistico assoluto.* Parte prima (Albrighi e Segati, 1926, pagg. 247).

Di un altro studioso italiano, che inviò pure all'Accademia una propria pubblicazione, ma che, invitato a dichiarare se intendeva con essa di aspirare al premio, non rispose, la Commissione crede di non poter considerarlo fra i concorrenti.

Si limita quindi a pronunciare giudizio esplicito sui tre lavori citati.

Il lavoro inviato dal sig. V. Marchi è un opuscolo seriamente pensato e scritto. L'Autore conosce e ha studiato con cura e diligenza tutta la discussione fatta dal Kant intorno alle prove dell'esistenza di Dio. Le sue osservazioni sono spesso fini

Digitized by Google

e penetranti. Ma, data la gravità e vastità dell'argomento, l'opuscolo del Marchi è troppo tenue per il conseguimento del premio Gautieri.

Più degno di considerazione per ampiezza di svolgimento è il lavoro del De Caria. Il quale, d'altra parte (prescindendo dai molti, non tutti lievi, errori di stampa), ha notevoli pregi intrinseci di concezione. Movendo dalla posizione idealistica, per la quale il principio di contraddizione ha valore bensì nella logica analitica, non nella logica concreta o del reale, l'Autore si sforza, con vigoria e sottigliezza dialettica, di dimostrare la validità universale di quel principio. E a tale scopo compie un'acuta analisi del pensiero e del giudizio riconducendolo all'unica realtà dell'atto di coscienza, inteso come essenziale relazione dei due termini, il soggetto e l'oggetto, ciascuno dei quali è reale e concreto appunto, e soltanto, in quella relazione. Il principio d'identità esprimerebbe la realtà colta nell'atto che unifica i contrarii, cioè risponderebbe alla essenziale unità del reale. Si può non essere persuasi della solidità della conclusione, e si può anche dubitare della bontà della impostazione del problema e del processo seguìto: ma non si può negare che il Saggio del De Caria sia una bella dimostrazione di coscienza filosofica e di vigoria d'argomentazione, un utile contributo alla discussione gnoseologica.

Buon lavoro è anche l'ampio studio di Gallo Galli: *Spirito e realtà*. Qui è una più larga indagine ricostruttiva di tutta la realtà e vita spirituale, dal grado della conoscenza sensibile a quello della conoscenza razionale, nell'attività teoretica, nella volitiva e nella sentimentale; e il concetto complessivo a cui l'Autore, dotato di bell'ingegno speculativo, giunge attraverso a una varia discussione, forse talora un po' prolissa, tal altra troppo stringata, ma sempre consapevole delle difficoltà, è quello di una realtà essenzialmente spirituale, che è però sistema del molteplice, e che si costituisce attraverso un dinamismo dialettico, in cui le diverse attività si presuppongono sempre. In una così vasta tessitura è naturale che parecchi problemi rimangano un po' avvolti nell'oscurità (per esempio quello dei

Digitized by Google

rapporti fra l'attività teoretica e la pratica, fra il sentimento e la volontà, fra attività appetitiva e attività finalistica, fra attività finalistica e attività morale, ecc.), e che su altri (come sul problema del male) troppo rapidamente l'Autore sorvoli. Inoltre è da rilevare come un difetto proprio di tutto il lavoro l'assoluta mancanza di ogni riferimento storico, che, pur essendo implicito, meriterebbe in parecchi punti di essere chiaramente illustrato.

Siamo, a ogni modo, in presenza di un buon lavoro. Ma quando si è trattato dell'aggiudicazione del premio, la Commissione ha dovuto chiedersi se il lavoro del Galli veramente si segnali come la migliore pubblicazione del triennio. E allora, nel campo della pura speculazione, si sono presentati alla attenzione nostra alcune altre pubblicazioni, che nella indagine dei problemi fondamentali circa la natura e la vita dello spirito nell'arte, nella scienza, nella morale, nell'educazione hanno portato da diversi punti di vista contributi più o meno importanti alla discussione filosofica.

Nella incertezza della comparazione e della scelta, la Commissione ha quindi creduto di dover allargare le sue indagini nel campo degli studii storici della filosofia. E qui essa, dopo alcune discussioni di confronto, si è fermata sopra un'opera che per la novità dell'argomento, per l'importanza di esso in rapporto alla filosofia e alla coscienza nazionale, per la rilevanza dei risultati ci è parsa particolarmente degna di considerazione. Si tratta dell'opera in due volumi di Angiolo Gambaro, *Riforma religiosa nel carteggio inedito di Raffaello Lambruschini*, vol. I, Introduzione, pagg. 434, Torino, Paravia, 1924; vol. II, *Carteggio religioso e appendice*, pagg. 403, Torino, Paravia, 1926.

Dei due volumi, il primo ha propriamente carattere e valore di studio storico-filosofico, il secondo, pur essendo tutto dedicato a pubblicare un carteggio, fin qui, per gran parte, inedito, del Lambruschini ad altri, e di altri a lui, è però ricco di note che hanno molti e importanti riferimenti alle questioni filosofiche e religiose trattate nel primo volume. Il quale ci offre un ampio e vivo quadro delle grandi questioni e discussioni d'ordine religioso-morale-educativo-politico, che si svolsero, si

Digitized by Google

può dire, intorno al Lambruschini, fra menti pensose e operose di Toscana e di fuori negli anni medesimi in cui si andava preparando il Risorgimento politico della Patria, e con il quale quelle erano intimamente, per varii nessi, legate. Il pensiero e desiderio di una riforma religiosa, che, incentrandosi sul problema essenzialmente filosofico dei rapporti fra autorità e libertà, si dilatasse ad abbracciare la interpretazione dei dogmi, la costituzione della Chiesa, i suoi rapporti con la società civile, era allora molto largamente diffuso; e il Lambruschini, certo, era in Italia una delle coscienze più atte, per la purezza della vita, l'acutezza e la temperanza dell'ingegno, la vivacità e larghezza della cultura, a proclamarlo, e a ragionarne. Aver visto l'interesse e l'importanza di questo aspetto del più vasto problema filosofico, onde è investito tutto il nostro Risorgimento; averlo, con cura amorosa, diligente e perspicace, studiato nel travaglio molteplice di un'anima superiore; aver rannodato intorno ad esso tutte le fila che lo congiungono al pensiero italiano, francese, svizzero del tempo, al mazzinianesimo, al saintsimonismo, al giansenismo, al lamennaisianismo; aver precisato, per quanto era possibile in materia così delicata e, direi, mobile, il pensiero, finora imperfettamente noto, del Lambruschini che, pur nella sua ansiosa e profonda preoccupazione di dare alla vita religiosa ed educativa un contenuto e un indirizzo essenzialmente interno e spirituale, volle sempre rimanere nell'orbita della Chiesa, costituiscono, a giudizio nostro, merito ragguardevole dell'opera del Gambaro. Ond'essa ci appare come un buon apporto, non pure alla conoscenza completa e sincera del gran moto spirituale e delle correnti filosofiche del nostro glorioso Risorgimento, ma anche alla ulteriore discussione e risoluzione di quei problemi etici-religiosi-pedagogici, che sono pure tanta, e così viva, parte della coscienza nazionale odierna.

L'importanza scientifica della pubblicazione del Gambaro, che è anche frutto di lunghe difficili e pazienti indagini compiute in varii archivii privati e pubblici, e che va integrata con la pubblicazione posteriore (ma sempre del 1926) di *Conferenze religiose e preghiere inedite* del Lambruschini (Venezia, La " Nuova Italia " editrice), è stata unanimemente ricono-

Digitized by Google

sciuta dalla critica, anche quando su taluni particolari di accertamento e di apprezzamento della figura, del pensiero e dei rapporti spirituali del Lambruschini ci potevano essere fra gli autorevoli recensenti dissensi e riserve.

Crediamo quindi di potervi proporre di assegnare il Premio Gautieri di filosofia per il triennio 1924-26 all'opera di ANGELO GAMBARO sulla *Riforma religiosa nel carteggio inedito di Raffaele Lambruschini.*

Torino, 20 maggio 1929.

La Commissione:

GAETANO DE SANCTIS, *Presidente.*
L. EINAUDI.
A. FAGGI.
G. SOLARI.
G. VIDARI, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
EMILIO REPOSSI.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

Opere scelte di Amedeo Avogadro (per cura di **I. Guareschi**).

Torino, Unione tipografico-editrice torinese, 1911, 1 vol. in-4° (4 csn., CXL-492 pp., 1 ritr.).

Miscellanea di studi danteschi. *Dante e il Piemonte.*

Torino, Fratelli Bocca editori, 1922, in-8° (VIII-648 pp.).

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 14 Aprile 1929 . *Pag.* 217

Colucci (Antonio). — Trattazione in grande del problema dei valori iniziali per le equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti . . . . . „ 219

Albenga (Giuseppe). — A proposito di qualche formola approssimata per la trave inflessa e sollecitata assialmente . . . . „

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 5 Maggio 1929 . *Pag.* 242

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 5 Maggio 1929 . *Pag.* 244

Grassi (Guido). — Sulla resistività dell'Alluminio . . . . „ 248

Marseguerra (Vincenzo). — Sulle funzioni tayloriane . . . „ 251

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 19 Maggio 1929 . „ 262

Relazione della Commissione per il Premio di fondazione Gautieri - Storia (1925-1927) . . . . . „ 266

Relazione della Commissione per il Premio di fondazione Gautieri - Filosofia (1924-1926) . . . . . „ 274

Tip. Vincenzo Bona - Torino

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

BIBLIOTECA NAZIONALE CENTRALE ROMA
16 NOV 1929
RIVISTE

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIV, DISP. 14ª e 15ª, 1928-1929

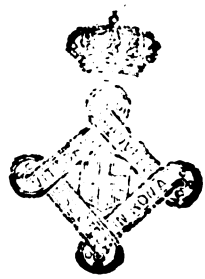
Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSI UNITE



Adunanza del 26 Maggio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono intervenuti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: PEANO, GRASSI, PANETTI, VALLAURI e il Segretario REPOSSI;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: DE SANCTIS, STAMPINI, EINAUDI, PATETTA, VIDARI, LUZIO, JANNACCONE e il Segretario FAGGI.

Scusano la loro assenza i Soci: D'OVIDIO, MATTIROLO, BOSELLI, RUFFINI, BRONDI e CIAN.

Dietro invito del Presidente, il Socio VIDARI legge la Relazione della Commissione per l'assegnazione del Premio di fondazione GAUTIERI per la Filosofia, relazione che conclude con la proposta che il premio sia assegnato, per il triennio 1924-26, all'opera di Angelo GAMBARO sulla *Riforma religiosa nel pensiero di Raffaele Lambruschini*. Posta ai voti, la relazione è approvata all'unanimità, senza alcuna osservazione da parte dei Soci.

Il Socio EINAUDI legge in seguito la Relazione della Commissione per l'assegnazione del Premio di fondazione GAUTIERI per la Storia, che conclude con la proposta che il premio per il triennio 1925-27 sia diviso in parti uguali fra i Professori

Digitized by Google

Arturo Carlo Jemolo e Luigi Pareti. Posta ai voti, la relazione e le sue conclusioni sono pure approvate all'unanimità, senza che, a richiesta del Presidente, alcun Socio presente faccia osservazioni.

Adunanza del 9 Giugno 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: Peano, Mattirolo, Grassi, Ponzio, Pochettino, Garelli e il Segretario Repossi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: Ruffini, Stampini, Brondi, Einaudi, Vidari, Luzio, Solari e il Segretario Faggi.

Scusano l'assenza i Soci: D'Ovidio, Somigliana, Panetti e Vallauri.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente propone alle Classi di inviare al Socio Boselli, in occasione del 91° suo genetliaco, il seguente telegramma:

Ricorrenza genetliaco V. E., R. Accademia Classi Unite felicitandosi porge fervidi augurî reverenti saluti.

Presidente: Parona.

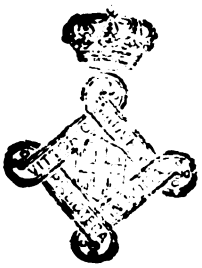
La proposta è accolta con vivo plauso.

Si passa quindi alla votazione per l'assegnazione del Premio Gautieri per la Filosofia 1924-26. Dalla votazione, fatta per schede segrete come prescrive lo Statuto, il Dott. Mons. Angelo Gambaro viene proclamato vincitore del premio.

Digitized by Google

Dalla votazione per l'assegnazione del Premio Gautieri per la Storia 1925-27, fatta con le stesse norme, risultano vincitori i Professori A. C. Jemolo dell'Università di Bologna e Luigi Pareti della Università di Firenze, fra i quali, giusta le proposte della Commissione, viene diviso il premio in parti eguali.

Gli Accademici Segretarii:
Emilio Repossi.
Adolfo Faggi.



Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 9 Giugno 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, GRASSI, PONZIO, POCHETTINO, GARELLI e il Segretario REPOSSI.

Scusano l'assenza i Soci: D'OVIDIO, SOMIGLIANA, PANETTI e VALLAURI.

Il Presidente presenta i seguenti omaggi pervenuti all'Accademia:

Chanousia. Annuario, N. 1, 1922-27, pubblicato a spese del Ministero dell'Economia (Direzione Generale dell'Agricoltura) col concorso del Dott. Marco DE MARCHI;

Ing. S. FRANCHI, *Sulla tettonica delle Alpi Cozie franco-italiane.*

Il Segretario, a nome del Socio corrisp. Prof. E. PISTOLESI, presenta, per l'inserzione negli *Atti*, una Nota dal titolo: *Sul calcolo della resistenza delle eliche:* 1. *L'eliminazione dei momenti flettenti;* 2. *I momenti torcenti e la loro eliminazione.*

Il Socio GARELLI presenta in seguito per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Prof. Michele GIUA e di Giovanni RACCIU, dal titolo: *Ricerche sulla resinificazione:* I. *Sulla condensazione dell'aldeide formica con l'uretano ordinario;* e ne espone brevemente il contenuto.

Il Presidente PARONA presenta infine, sempre per l'inserzione negli *Atti*, una Nota della Dott.ssa R. ZUFFARDI COMERCI, intitolata: *La fauna pliocenica di Masserano Cossato (Biellese).*

Digitized by Google

LETTURE

Sul calcolo di resistenza delle eliche.

Nota del Socio corrispondente ENRICO PISTOLESI

I. — L'eliminazione dei momenti flettenti.

È noto come un'opportuna forma della linea baricentrica della pala permetta di ottenere una compensazione fra i momenti flettenti dovuti alle azioni aerodinamiche e quelli dovuti alla forza centrifuga.

Considerando del momento flettente agente in una sezione i due componenti: principale (asse momento normale all'asse di rotazione dell'elica) e secondario (asse momento coincidente con l'asse di rotazione), il problema si scinde in due: compensazione dei momenti flettenti principali e compensazione dei momenti flettenti secondari.

Sebbene ambedue questi problemi siano stati risolti da tempo (1), ci è sembrato opportuno riprenderne in considerazione alcuni aspetti, anche perchè i precedenti studi in argomento sono ormai rari o mal noti.

1. — La risoluzione dei suddetti problemi richiede la conoscenza della distribuzione lungo l'asse della pala delle azioni elementari centrifughe e delle pressioni aerodinamiche, principale e secondaria.

In altri termini, se indichiamo con *fdr* la forza centrifuga

(1) R. Verduzio, *Sulla statica delle eliche*, Roma, 1917; E. Pistolesi, *Studio sulle sollecitazioni delle eliche*, " Bollettino Tecnico N. 5 della Direzione Sperimentale dell'Aviazione ". 1919.

Digitized by Google

agente nel tratto di pala compreso fra le sezioni praticate ai raggi r e $r + dr$, con $t\,dr$ e $q\,dr$ le forze aerodinamiche elementari, rispettivamente principale e secondaria, agenti sullo stesso elemento di pala, si richiede la conoscenza delle funzioni

$$f(r),\ t(r) \text{ e } q(r).$$

È facile allora impostare le equazioni differenziali delle due proiezioni $y(r)$ e $z(r)$ principale e secondaria della linea baricentrica (linee di campanatura) in base alla condizione che tale linea deve, per ogni valore del raggio, essere tangente alla risultante delle forze agenti sul tratto di pala compreso fra la sezione al raggio considerato e l'estremità.

Si avrà:

a) *per la campanatura principale:*

$$\frac{dy}{dr} = \frac{\int_r^R t\,dr}{\int_r^R f\,dr}; \tag{1}$$

Questa equazione suggerisce senz'altro la risoluzione, numerica o grafica, del problema.

Adottando, ad es., la via grafica, con due integrazioni grafiche procedenti dall'estremità del raggio verso il centro si determinano in corrispondenza delle varie sezioni i valori dei due termini della frazione che fornisce $\frac{dy}{dr}$. Una terza integrazione fornisce y in funzione di r.

Ci asteniamo dallo scendere ai particolari, rimandando per questi ai lavori citati.

b) *per la campanatura secondaria:*

Posto $Q = \int_r^R q\,dr$ e $F = \int_r^R f\,dr$, si ha:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{Q - \int_r^R f \frac{z}{r}\,dr}{F},$$

ovvero:

$$F\frac{dz}{dr} - Q + \int_r^R f \frac{z}{r}\,dr = 0.$$

Digitized by Google

Derivando rispetto ad r, si ottiene:

$$\frac{dF}{dr}\cdot\frac{dz}{dr}+F\frac{d^2z}{dr^2}-\frac{dQ}{dr}-\frac{dF}{dr}\cdot\frac{z}{r}=0. \qquad (2)$$

Si tratta di risolvere questa equazione differenziale, il che può farsi in più modi.

2. — Un metodo diretto, già indicato nel Bollettino Tecnico N. 5 della Direzione Sperimentale dell'Aviazione, si basa sul principio stesso di partenza, cioè nel tracciare ogni elemento nella direzione della forza risultante sulla porzione esterna della pala. Ciò rende possibile un procedimento "passo per passo", per il quale rimandiamo al citato Bollettino, ove è applicato per via grafica.

Un altro metodo, indicato nelle Lezioni sulla Teoria delle Eliche, da me tenuto al Corso per Costruttori Aeronautici del R. Politecnico di Torino (1), è il seguente:

Moltiplicando tutti i termini della (2) per r e trasformando opportunamente, si ottiene:

$$r\frac{d}{dr}\left(F\frac{dz}{dr}\right)-z\frac{dF}{dr}=r\frac{dQ}{dr}.$$

Si aggiunga e si tolga $F\frac{dz}{dr}$; si ottiene:

$$r\frac{d}{dr}\left(F\frac{dz}{dr}\right)+F\frac{dz}{dr}-\left(z\frac{dF}{dr}+F\frac{dz}{dr}\right)=r\frac{dQ}{dr},$$

ossia:

$$\frac{d}{dr}\left(rF\frac{dz}{dr}\right)-\frac{d}{dz}(Fz)=r\frac{dQ}{dr}.$$

Integrando e tenendo conto che per $r=R$, $F=0$, si ha:

$$F\left(r\frac{dz}{dr}-z\right)=-\int_r^R r\frac{dQ}{dr}\,dr.$$

---

(1) *Teoria delle eliche.* Dispense litografate. Torino, Perotti, 1922.

Digitized by Google

Posto

$$I = \int_r^R rq\, dr,$$

si ha dunque:

$$F\left(z - r\frac{dz}{dr}\right) = I,$$

od anche:

$$r^2 F \frac{d}{dr}\left(\frac{z}{r}\right) = -I,$$

e quindi:

$$\frac{z}{r} = \int_r^R \frac{I}{r^2 F} + C.$$

Se imponiamo, ad esempio, che per $r = R$ sia $z = 0$, si ha:

$$z = r\int_r^R \frac{I}{r^2 F}\, dr. \qquad (3)$$

Graficamente necessitano due integrazioni grafiche, una per determinare I, l'altra per determinare $\frac{z}{r}$.

3. — Ma il problema può risolversi anche per altra via, con un'impostazione sostanzialmente equivalente, ma formalmente diversa.

Calcoliamo il momento flettente in una sezione. Esso sarà la somma del momento delle forze elementari q, cioè:

$$\int_r^R Q\, dr,$$

e del momento delle forze centrifughe elementari. Decomposte queste nelle due componenti secondo r e secondo z, ponendo il punto di concorso di esse nell'origine, si hanno facilmente per i momenti derivanti dall'una e dall'altra i valori:

$$-z\int_r^R f\, dr \quad \text{e} \quad r\int_r^R f\frac{z}{r}\, dr$$

Digitized by Google

(si assume per senso positivo dell'asse z quello per cui si passa da r a z nel senso di rotazione dell'elica).

La compensazione dei momenti flettenti si traduce perciò nell'equazione

$$\int_r^R Q\,dr - z\int_r^R f\,dr + r\int_r^R f\frac{z}{r}\,dr = 0, \qquad (4)$$

da cui:

$$\frac{1}{r}\int_r^R Q\,dr - \frac{z}{r}\int_r^R f\,dr + \int_r^R f\frac{z}{r}\,dr = 0.$$

Posto $\frac{z}{r} = \zeta$, derivando la precedente equazione rispetto ad r, posto inoltre $\int_r^R Q\,dr = M''$, si ha:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{M''}{r}\right) - \frac{d\zeta}{dr}F = 0,$$

da cui:

$$\frac{d\zeta}{dr} = \frac{\frac{d}{dr}\left(\frac{M''}{r}\right)}{F},$$

e quindi:

$$\zeta = -\int_r^R \frac{\frac{d}{dr}\left(\frac{M''}{r}\right)}{F}\,dr + C,$$

$$z = -r\int_r^R \frac{d\left(\frac{M''}{r}\right)}{F} + Cr, \qquad (5)$$

che può anche scriversi:

$$z = r\int_r^R \frac{M'' + rQ}{Fr^2}\,dr + Cr.$$

Il termine Cr rappresenta (data la piccolezza di z) una rotazione attorno ad O ed è senza importanza. Si può cioè prendere $C = O$ imponendo che sia $z = O$ per $r = R$.

Digitized by Google

Le due soluzioni (3) e (5) sono identiche, com'è naturale. Ed invero, integrando per parti:

$$I = \int_r^R rq\,dr = Qr + \int_r^R Q\,dr.$$

4. — Una soluzione approssimata dei due problemi sopra indicati può ottenersi semplicemente assumendo a priori la forma della linea di campanatura (ad es. rettilinea o parabolica) e imponendo che i momenti siano compensati in uno o due punti determinati, ad esempio alla radice della pala e a metà di essa.

Per la campanatura principale il calcolo dei momenti al raggio r conduce alla relazione:

$$\int_r^R T\,dr = \int_r^R f(y_r - y)\,dr\,, \tag{6}$$

$$\int_r^R T\,dr = \int_r^R f y_r\,dr - yF.$$

Se si adotta la forma rettilinea

$$y = \alpha r \tag{7}$$

si avrà:

$$\int_r^R T\,dr = \alpha \int_r^R fr\,dr - \alpha r F\,;$$

e integrando per parti:

$$\int_r^R T\,dr = \alpha \int_r^R F\,dr\,,$$

da cui:

$$\alpha = \frac{\int_r^R T\,dr}{\int_r^R F\,dr}. \tag{8}$$

Se vogliamo che la (6) sia soddisfatta per $r = r_1$, essendo r_1 il raggio corrispondente alla radice della pala, basterà porre r_1 nella (8) al limite inferiore dei due integrali. Se indichiamo con T_1 ed F_1 i valori della spinta e della forza centrifuga alla radice della pala (cioè per $r = r_1$), con δ_T e δ_F le distanze dei

Digitized by Google

baricentri dei diagrammi t ed f dall'ordinata condotta per $r = r_1$, la (8) si può scrivere:

$$\alpha = \frac{T_1 \delta_T}{F_1 \delta_F}. \tag{8'}$$

Se poniamo

$$y = \alpha r + \beta r^2,$$

dalla (6) si ottiene:

$$\int_r^R T\,dr = \alpha \int_r^R F\,dr + \beta \int_r^R Fr\,dr. \tag{9}$$

Applicando la (9) a due punti r_1 ed r_2 se ne deducono facilmente i valori di α e di β.

5. — Per quanto riguarda la campanatura secondaria, ricorreremo alla (4). Tenuto presente che un termine del tipo Kr nell'equazione di z non ha nessuna influenza sui momenti, basterà porre (per campanatura rettilinea):

$$z = e. \tag{10}$$

Sostituendo nella (4) e integrando per parti si ottiene facilmente:

$$\int_r^R Q\,dr = er \int_r^R \frac{F}{r^2}\,dr,$$

da cui:

$$e = \frac{\int_r^R Q\,dr}{r \int_r^R \frac{F}{r^2} dr}. \tag{11}$$

Conviene applicare la (11) per $r = O$; in tal caso il numeratore è semplicemente la coppia $\frac{C}{n}$ competente alla pala (supposto l'elica di n pale); il denominatore si presenta sotto forma indeterminata. Il calcolo diretto del momento flettente dovuto alla forza centrifuga fornisce peraltro il valore:

$$\int_0^R f \frac{e}{r} \cdot r\,dr = e\,F_0$$

Digitized by Google

(F_0 = forza centrifuga per $r = 0$) e quindi:

$$e = \frac{C\,n}{F_0}, \tag{12}$$

semplicissimo risultato già trovato incidentalmente in altra ricerca [1].

Se poi si vuole adottare la forma parabolica:

$$z = e + cr^2 \tag{13}$$

sostituendo nella (4) si ottiene:

$$\int_r^R Q\,dr = er\int_r^R \frac{F}{r^2}\,dr - cr\int_r^R F\,dr. \tag{14}$$

Se applichiamo la (14) per $r = 0$ si ottiene lo stesso risultato di prima e quindi lo stesso valore di e dato dalla (12). Ciò non può sorprendere, perchè il momento della forza centrifuga per $r = 0$ dipende soltanto dall'eccentricità e, com'è facile verificare eseguendo la decomposizione delle forze centrifughe elementari per O ed osservando che per il punto $r = 0$ è nullo il momento delle componenti parallele a z.

Resterà da determinarsi il valore di c, applicando la (14) in un punto r_2, ad esempio per $r_2 = 0{,}5$, essendo e già determinato.

II. — I momenti torcenti e la loro eliminazione.

Lo studio dei momenti torcenti per una pala d'elica può avere importanza da due diversi punti di vista:

a) per ogni tipo di elica, ma specialmente per le eliche in legno o per le eliche metalliche a pale molto sottili, in quanto

---

[1] *Calcolo della linea elastica dell'elica,* " Atti del IV Congresso Internazionale di Navigazione aerea „, Roma, 1928 e " L'Aerotecnica „, 1927.

Digitized by Google

la torsione, modificando l'orientazione delle sezioni, modifica il passo e le caratteristiche aerodinamiche dell'elica;

b) per le eliche a passo variabile, nelle quali ogni pala è girevole intorno ad un asse normale all'albero motore, in quanto il momento torcente complessivo agente sulla pala tende a produrne la rotazione e deve essere contrastato, sia disponendo opportuni arresti, sia affidando il comando dell'orientazione della pala ad un meccanismo ad arresto spontaneo.

L'eliminazione dei momenti torcenti può quindi avere un duplice obiettivo: annullare il momento torcente per ogni sezione, in guisa da assicurare la costanza delle caratteristiche geometrico-aerodinamiche dell'elica; ovvero annullare il momento torcente alla radice della pala, così da eliminare il pericolo di una spontanea rotazione di questa e da rendere minimo lo sforzo necessario alla manovra nel caso di eliche a pale orientabili.

Il problema deve naturalmente essere impostato sullo studio dei momenti torcenti dovuti alle azioni aerodinamiche e di quelli dovuti alle forze centrifughe.

L'argomento è stato già da alcuni studiosi parzialmente trattato [1]. Ritengo tuttavia non inutile trattarlo nuovamente, per giungere alla importante conclusione che la completa eliminazione dei momenti torcenti (sia nell'uno che nell'altro dei due sensi sopra accennati) non è praticamente possibile, a differenza di quanto invece può farsi per i momenti flettenti.

1. — Il calcolo dei momenti torcenti dovuti alle azioni aerodinamiche richiede la conoscenza del centro di pressione delle forze aerodinamiche e del valore di queste.

In calcoli di questo genere, necessariamente approssimati, e necessariamente valevoli per una sola condizione di funzionamento dell'elica, è lecito far ricorso ad ipotesi semplificative.

---

[1] Greffits & Heigs, " R. & M. Aeronautical Research Committee „, 452, 454, 455; Alexandroff, *La théorie tourbillonnaire du Prof. N. Joukowski et le calcul des hélices propulsives aériennes,* " Atti del IV Congresso Internaz. di Navigaz. aerea „, Roma, 1928.

Digitized by Google

Assumiamo pertanto che il centro di pressione su di ogni sezione sia sulla parallela alla corda condotta dal baricentro della sezione e distante da esso di $l/4$, dove l è la lunghezza della corda [1]. Indichiamo inoltre con r il raggio, con $t\,dr$ e $q\,dr$ le azioni elementari, rispettivamente assiale e tangenziale, con $y(r)$ e $z(r)$ le coordinate del baricentro della sezione al raggio r (l'asse y essendo diretto parallelamente all'asse di rotazione e l'asse z normalmente al piano dell'asse y e dell'asse r, quest'ultimo, nel caso di pale orientabili, coincidente con l'asse di rotazione della pala) [2] e finalmente con α l'*angolo di calettamento* della sezione, cioè l'angolo della corda col piano $r\,z$.

Il momento torcente nella sezione r_1 sarà:

$$M_t' = \int_{r_1}^{R} t\left(\frac{l}{4}\cos\alpha + z - z_1\right)dr + \int_{r_1}^{R} q\left(\frac{l}{4}\operatorname{sen}\alpha + y - y_1\right)dr. \quad (1)$$

2. — Il momento torcente dovuto alla forza centrifuga si ottiene in base alle considerazioni che seguono.

Su una porzione di pala, compresa fra le sezioni praticate ai raggi r ed $r + dr$, ogni elemento di base $d\sigma$ e altezza dr e coordinate y' e z' è soggetto ad una forza centrifuga elementare passante per l'asse di rotazione, che ha una componente normale al piano della sezione, data da $\Delta \cdot d\sigma \cdot dr \cdot \omega^2 r$, dove Δ è la *densità* del materiale costituente l'elica, ed una componente contenuta nel piano della sezione, $\Delta \cdot d\sigma \cdot dr \cdot \omega^2 z'$.

Le forze elementari contenute nel piano della sezione, trasportate nel baricentro, danno origine ad una forza parallela all'asse z di valore

$$\Delta\,\omega^2\,dr \int_\sigma z'\,d\sigma = \Delta\,\omega^2\,\sigma z\,dr, \quad (2)$$

---

[1] Questa ipotesi può in qualche caso condurre ad una sopravalutazione del momento torcente elementare; ma ciò, come risulterà dai calcoli, rafforza in generale le conclusioni del presente studio. Del resto l'ipotesi ammessa è assai verosimile per sezioni simmetriche e in generale per forti incidenze.

[2] y e z sono le coordinate delle cosidette linee di campanatura principale e secondaria, cioè le due proiezioni della linea baricentrica.

Digitized by Google

dove σ è l'area della sezione e z la coordinata del suo baricentro, e ad un momento torcente elementare

$$\Delta\omega^2 dr \int_\sigma z'(y'-y)\,d\sigma = \Delta\omega^2 dr \int_\sigma (z'-z)(y'-y)\,d\sigma\ (1).\quad (3)$$

La quantità espressa dall'integrale non è altro che il momento centrifugo della sezione rispetto a due assi baricentrici paralleli rispettivamente all'asse y e all'asse z. Se indichiamo questo con m_{yz}, il momento torcente elementare espresso dalla (3) potrà scriversi:

$$\Delta\omega^2 m_{yz}\,dr. \quad (3')$$

Ciò premesso, il momento torcente sulla sezione r_1 sarà:

$$M_t'' = \Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} m_{yz}\,dr + \Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} \sigma z (y-y_1)\,dr. \quad (4)$$

Occorre notare che i due momenti M'_t e M''_t hanno sensi opposti e che perciò il momento torcente complessivo è dato dalla loro differenza:

$$M_t = \int_{r_1}^{R} \frac{l}{4}(t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,dr - \Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} m_{yz}\,dr +$$

$$+ \int_{r_1}^{R} t(z-z_1)\,dr + \int_{r_1}^{R} q(y-y_1)\,dr - \Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} \sigma z (y-y_1)\,dr. \quad (5)$$

Nella precedente formula si sono riuniti nel primo rigo i termini indipendenti dalla forma della linea baricentrica, nel secondo rigo i termini che ne dipendono e sui quali possiamo agire, variando opportunamente la linea baricentrica, allo scopo di ottenere la compensazione dei momenti torcenti.

3. — La compensazione assoluta, cioè per tutte le sezioni, richiede che il momento torcente non vari nel passare da una sezione ad una infinitamente vicina. Infatti, poichè il momento

---

(1) Ciò perchè $\int z(y'-y)\,d\sigma = z\int (y'-y)\,d\sigma = 0$, essendo y la coordinata del baricentro.

Digitized by Google

è certo nullo all'estremità della pala, esso rimane in tal caso nullo ovunque.

Ora, nel passare da r ad $r - dr$, il momento torcente varia di:

$$\frac{l}{4}(t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\alpha)\,dr - \Delta\omega^2 m_{yz}\,dr + T\,dz + Q\,dy - \\ - \Delta\omega^2\,dy\int_r^R \sigma\,.\,z\,dr, \qquad (6)$$

dove si è posto

$$T = \int_r^R t\,dr\ , \qquad Q = \int_r^R q\,dr.$$

Uguagliando a zero, si ha l'equazione cercata.

Stabilita la funzione z, si può da questa equazione ricavare la y. Ammettiamo, ad es., che sia $z = \text{cost.} = e$.

Si ha allora:

$$\frac{l}{4}(t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\alpha)\,dr - \Delta\omega^2 m_{yz}\,dr = \left(e\frac{G}{g}\omega^2 - Q\right)dy, \qquad (7)$$

avendo posto $G = g\Delta\int_{r_1}^R \sigma\,dr$ il peso del tratto di pala dalla sezione considerata alle estremità. Da cui:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{\frac{l}{4}(t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\alpha) - \Delta\omega^2 m_{yz}}{e\frac{G}{g}\omega^2 - Q}. \qquad (7')$$

Si osservi che $t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\alpha$ non è altro che la proiezione della pressione aerodinamica elementare (risultante di t e q) sulla normale alla corda.

Se invece

$$z = e + cr\,,$$

si ha:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{\frac{l}{4}(t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\alpha) - \Delta\omega^2 m_{yz} + Tc}{e\frac{G}{g}\omega^2 + cF - Q}, \qquad (7'')$$

Digitized by Google

essendo $F = \Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} \gamma r\, dr$ la forza centrifuga totale agente sulla sezione considerata.

4. — Per vedere se le soluzioni (7') e (7'') sono o no praticamente possibili, poniamo $t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\rho c_s l w^2$, dove ρ è la densità dell'aria, c_s è un coefficiente di spinta, che poco differisce dal coefficiente consueto di portanza [1] e $w^2 = r^2\omega^2 + v^2$ essendo v la velocità di avanzamento. Introdotto il rapporto funzionale

$$\Upsilon = \frac{v}{R\omega}$$

segue $v = \frac{\Upsilon r\omega}{r\,R}$.

Sostituendo:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{\frac{l^2}{8} c_s \rho r^2 \omega^2 \left(1 + \frac{\Upsilon^2}{(r\,R)^2}\right) - \Delta\omega^2 m_{yz} + Tc}{e\,\frac{G}{g}\omega^2 + cF - Q}.$$

Il calcolo approssimativo di m_{yz} si può condurre in base alle considerazioni seguenti.

Siano $\eta\zeta$ gli assi principali d'inerzia della sezione; se y e z sono assi ortogonali, ma non principali, ed è α l'angolo di cui occorre ruotare la coppia $\eta\zeta$ per portarla a coincidere con $y\,z$, si ha, com'è noto:

$$m_{yz} = (J_\eta - J_\zeta)\,\mathrm{sen}\alpha\,\cos\alpha.$$

Si può in pratica ammettere che l'asse ζ sia parallelo alla corda della sezione, nel qual caso α è l'angolo di calettamento. Generalmente, data la forma delle sezioni, J_ζ è piccolo di fronte a J_η. Se si potesse supporre concentrata tutta la sezione sulla sua corda, si avrebbe, posta uguale a σ l'area:

$$m_{yz} = \sigma\,\frac{l^2}{12}\,\mathrm{sen}\alpha\,\cos\alpha.$$

---

[1] Naturalmente relativo all'*allungamento virtuale* della sezione.

Digitized by Google

In generale si potrà introdurre un coefficiente correttivo k e porre:

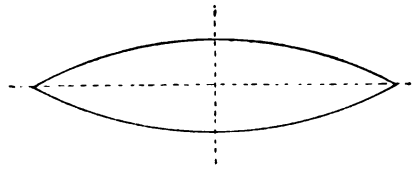
$$m_{yz} = k\sigma \frac{l^2}{12} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

con k non molto diverso da 1.

Ad es. per una sezione ellittica in cui lo spessore sia 1/6 della corda, si trova $k = 0{,}74$.

Per una sezione cava (lamiera) di spessore costante, molto sottile, costituita da due archi di cerchio come è indicato in figura, pure con rapporto 1/6 fra spessore e corda, si trova

$$k = 1{,}02.$$



Quanto all'area σ, si può porre $\sigma = al^2$ (a per le sezioni piene d'elica ordinaria è compreso fra 1/8 e 1/10); si ponga inoltre:

$$\frac{l}{R} = \lambda\,, \quad \frac{r}{R} = \xi\,.$$

Avremo:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{R^4 \omega^2 \lambda^2 \left[\frac{1}{8} \rho c_s (\xi^2 + \gamma^2) - \frac{ka}{12} \Delta \lambda^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\right] + Tc}{e \frac{G}{g} \omega^2 + cF - Q}.$$

Se, ad esempio, supponiamo che sia $z = 0$ per tutte le sezioni (pala priva di campanatura secondaria), ossia $e = c = 0$, al numeratore rimangono i soli termini esprimenti il contributo dei momenti elementari e al denominatore la sola risultante tangenziale Q.

Un esempio servirà ad orientare circa l'ordine di grandezza di queste quantità. Sia:

$$k = 0{,}8\,, \quad a = \frac{1}{8}\,, \quad \Delta\,(\text{legno}) = 72\,, \quad \lambda = 0{,}17.$$

Digitized by Google

Quanto ad α, supponiamo che l'elica sia a passo geometrico uniforme e sia γ_c il valore di γ relativo ad esso. Si ha allora:

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \frac{\gamma_c \xi}{\gamma_c^2 + \xi^2}.$$

Supponiamo $\gamma = \gamma_c = 0{,}4$ e assumiamo per c_s il valore 0,5. Si ottiene:

	$\xi =$	0.2	0,4	0,6	0,8	1,0
a) $\frac{1}{8}\rho c_s(\xi^2+\gamma^2)$	=	0,00156	0,00250	0,00416	0,00625	0,00906
b) $\frac{ka}{12}\Delta\lambda^2\frac{\gamma_c\xi}{\gamma_c^2+\xi^2}$	=	0,00694	0,00867	0,00800	0,00694	0,00598
b-a)	=	0,00538	0,00617	0.00384	0,00069	−0,00308.

Risulta da questo prospetto che la variabilità dei momenti torcenti elementari lungo la pala è molto minore per la forza centrifuga che per le azioni aerodinamiche, e, nel caso considerato, che i primi soverchiano per quasi tutta la pala i secondi (ciò che si verifica in quasi tutti i casi pratici). Naturalmente il risultato sarebbe modificato alquanto introducendo la rastremazione della pala, cioè la variabilità di λ col raggio; ma ciò non farebbe che aggravare la conclusione che vogliamo trarre da quanto sopra, cioè la grande variabilità lungo la pala del momento torcente complessivo.

Osserviamo ora che, ammessa una certa distribuzione della spinta tangenziale lungo il raggio, è facile calcolare Q in funzione di ξ e della coppia resistente dell'elica. Ammettiamo, ad esempio, che la spinta tangenziale sia uniformemente distribuita da $\xi = 0{,}2$ a $\xi = 1$; che l'elica sia a 2 pale e che C sia la coppia totale sull'albero; si avrà:

$$Q = \frac{C(1-\xi)}{0{,}96\,R};$$

e posto $C = \rho\kappa R^5\omega^2$, segue:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{0{,}96\,\lambda^2\left[\frac{1}{8}\rho c_s(\xi^2+\gamma^2) - \frac{ka}{12}\Delta\lambda^2\frac{\gamma_c\xi}{\gamma_c^2+\xi^2}\right]}{\rho\kappa(1-\xi)}.$$

Digitized by Google

Ora, nelle ipotesi ammesse, un valore plausibile di κ è 0,005. Se ne deducono i seguenti valori di $\frac{dy}{dr}$:

$$\begin{array}{lccccc} \xi = & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1{,}0 \\ \frac{dy}{dr} = & 0{,}30 & 0{,}46 & 0{,}43 & 0{,}16 & -\infty . \end{array}$$

Queste cifre valgono già a dimostrare l'impossibilità pratica della compensazione perfetta, giacchè $\frac{dy}{dr}$ non potrebbe praticamente oltrepassare qualche centesimo. Ma l'impossibilità risulterà ancor più manifesta se osserviamo che $-\frac{0{,}96\,\lambda^2}{\rho\,\kappa\,(1-\xi)}$ ha valori che vanno da 55 a ∞ e che perciò la quantità entro parentesi al numeratore dovrebbe risultare dell'ordine dei decimillesimi, mentre è differenza di quantità dell'ordine dei millesimi. Ne deriva che un errore anche piccolo nelle ipotesi si ripercuote in misura notevolissima sui risultati, togliendo ad essi ogni fondamento.

La conclusione può confermarsi senza difficoltà anche ammettendo una campanatura secondaria.

5. — Il secondo problema, la compensazione dei momenti alla radice della pala, si risolve uguagliando a zero la somma dei momenti data dalla (5), dove per r_1 s'intenderà il valore del raggio che compete alla radice della pala.

Generalmente le due campanature sono già calcolate per la compensazione dei momenti flettenti. Siccome però la campanatura principale è sempre determinata a meno di un termine costante e quella secondaria a meno di un termine proporzionale ad r [1], se indichiamo con y_i e z_i i valori inizialmente calcolati, si può scrivere

$$z = y_i + h\,, \qquad y = z_i + c\,r$$

e cercare di determinare h e c in guisa da soddisfare la (5). Si

---

[1] Vedasi la 1ª parte della presente comunicazione,

Digitized by Google

vede subito che h senz'altro si elimina, perchè nella (5) compaiono sempre le differenze $y - y_1$; mentre la costante c viene espressa dalla formula seguente, nella quale si sono aboliti, per semplicità di scrittura, gli indici i alle lettere z ed y, che perciò rappresentano qui i valori inizialmente assunti per le due campanature, e si è indicato con M_{ti} il momento calcolato mediante la (5) con i suddetti valori iniziali delle campanature:

$$c = \frac{M_{ti}}{\Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} \sigma r (y - y_1)\, dr - \int_{r_1}^{R} t (r - r_1)\, dr}. \qquad (8)$$

Naturalmente si potrebbero operare sulla precedente formula trasformazioni analoghe a quelle sviluppate al numero precedente, introducendo le ipotesi ivi assunte. Un'analisi fatta sulla base di tali ipotesi porterebbe facilmente a concludere che anche il problema attuale è, nella generalità dei casi, praticamente insolubile, nel senso che i valori di c che la (8) fornisce sono, oltre che molto incerti, costruttivamente inammissibili.

Pisa, 26 aprile 1929, VII.

Digitized by Google

Ricerche sulla resinificazione.

I.

Sulla condensazione dell'aldeide formica con l'uretano ordinario.

Nota di MICHELE GIUA e GIOVANNI RACCIU
presentata dal Socio nazion. residente Felice Garelli.

In una Nota precedente, uno di noi (1) ha studiato l'influenza di alcuni aggruppamenti sulla resinificazione di diversi derivati del cinnamilidenacetofenone, operata dalla luce solare. Riprendendo in questa Nota in esame il fenomeno della resinificazione delle sostanze organiche in relazione con la loro costituzione chimica, abbiamo fermato la nostra attenzione sulla condensazione dell'aldeide formica con l'uretano ordinario, in modo da stabilire un confronto coi prodotti resinosi che si ottengono nella condensazione della stessa aldeide con l'urea, tiourea, ecc., che, come è noto, presentano anche interesse tecnico.

Non crediamo opportuno di riassumere i risultati sperimentali che hanno condotto, in un periodo piuttosto recente, a mettere in evidenza una intima relazione fra costituzione chimica e resinificazione; sia perchè, essendo l'argomento per sè stesso vasto, il solo porre in luce le conclusioni a cui si è pervenuti richiederebbe troppo spazio, sia per il fatto che l'argomento è stato fatto oggetto recentemente di una trattazione sistematica da J. Scheiber e K. Sändig in un volume avente per titolo *Die künstlichen Harze* (2).

(1) GIUA, " Gazz. chim. ital. „ *35*, 567 (1925).

(2) N. 14 della collez. *Chemie in Einzeldarstellungen* edita dalla " Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft „ di Stuttgart (1929).

Digitized by Google

Nella dotta monografia di Scheiber e Sändig non viene presa in esame la reazione che forma oggetto di questa Nota. Essa però era stata descritta quasi contemporaneamente dal Bischoff (3) e da Conrad e Hock (4), i quali, nello studiare la condensazione dell'aldeide formica con l'uretano ordinario, pur avendo notato la formazione di prodotti oleosi, presero solo in esame un composto cristallino, il dimero dell'anidroformaldeideuretano, che si formerebbe in base alla equazione:

$$2\,NH_2 . CO_2C_2H_5 + 2CH_2O \longrightarrow \begin{matrix} C_2H_5O_2C{-}N{-}{-}CH_2 \\ | \quad\quad | \\ CH_2{-}N{-}CO_2C_2H_5 \end{matrix} + 2H_2O.$$

Secondo Bischoff, Conrad e Hock, il prodotto cristallino fusibile a 100-102° che si ottiene nella reazione cennata, corrisponderebbe alla forma dimolecolare dell'anidroformaldeideuretano monomolecolare, $CH_2 = N - CO_2C_2H_5$. A questa conclusione Conrad e Hock furono condotti dalla determinazione della grandezza molecolare, fatta col metodo ebullioscopico, usando come solvente l'etere.

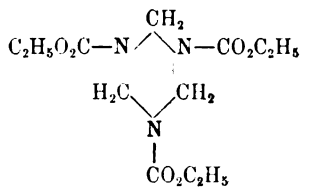
Abbiamo ripreso lo studio della stessa reazione, in vista di porre in evidenza l'influenza del gruppo azometinico $-N=C<$ sulla resinificazione, proprio in un caso assai più semplice di quello che non appaia da altre reazioni analoghe, quali le condensazioni dell'aldeide formica con l'urea e derivati e, più particolarmente, con le aniline. Facendo avvenire la condensazione dell'aldeide formica in soluzione acquosa (formalina del commercio) con l'uretano ordinario, in presenza di acido cloridrico e in condizioni pressochè identiche a quelle descritte da Conrad e Hock, che non differiscono di molto da quelle seguite dal Bischoff, il prodotto della reazione, come notarono i detti sperimentatori, è costituito da un olio che, lasciato lungamente a sè o all'aria o in essiccatore nel vuoto, ha la tendenza ad ispessire.

Facendo bollire a lungo il prodotto oleoso della reazione

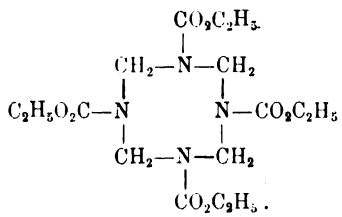
(3) " Ber. chem. Gesell. „, *36*, 39 (1903).
(4) Ivi, *36*, 2206 (1903).

Digitized by Google

con acido acetico diluito si ottiene un composto bianco, cristallino, che ha un punto di fusione identico a quello dell'anidroformaldeideuretano di Bischoff e di Conrad e Hock. Nell'analisi di questo prodotto cristallino ottenemmo risultati concordanti coi valori che si calcolano per l'anidroformaldeideuretano, ma la determinazione del peso molecolare col metodo crioscopico dette valori corrispondenti alla formola $(CH_2 = N - CO_2C_2H_5)_3$. Questo trimero cristallino dell'anidroformaldeideuretano può essere quindi rappresentato, analogamente a quanto si fa per il trimero cristallino dell'aldeide formica, il triossimetilene, da una formola ciclica esagonale —



Riscaldando invece il prodotto oleoso della reazione fra aldeide formica e uretano con acido acetico glaciale ed eliminando infine l'acido per evaporazione si ottiene una resina dura, di color giallastro, solubile in benzene, che all'analisi dette valori corrispondenti all'anidroformaldeideuretano, mentre col metodo crioscopico si ottennero per il peso molecolare valori corrispondenti alla formola $(CH_2 = N - CO_2C_2H_5)_4$. Volendo stabilire anche per questo composto una formola ciclica si può ad esso attribuire quella rappresentata dallo schema seguente:



Parte sperimentale.

Gr. 89 di uretano ordinario si disciolgono in gr. 90 di formalina al 40 % e alla soluzione limpida e filtrata così ottenuta

Digitized by Google

si aggiungono cc. 25 di acido cloridrico conc.: agitando, la reazione di condensazione s'inizia rapidamente, mentre la temperatura sale a circa 80°. Dopo che la reazione è terminata si riscalda all'ebollizione in apparecchio a ricadere per almeno tre ore. Anche a caldo il liquido si divide in due strati, di cui uno oleoso, pesante, che col raffreddamento ispessisce. Si aggiunge il doppio volume di acqua e si estrae con etere. Il residuo dell'estratto etereo è costituito da un olio incolore, che a freddo e lasciato a sè diventa sempre più vischioso.

Quest'olio fu disciolto in etere, filtrato ed evaporato il solvente; mantenuto in essiccatore nel vuoto su acido solforico per oltre una settimana, fu analizzato.

Gr. 0,1706 di sostanza dettero gr. 0,2983 di CO_2 e gr. 0,1128 di H_2O; gr. 0,1721 di sost. dettero cc.20 di N (a 12° e 738 mm.)

		Trovato	Calcolato
	C %:	47,76	47,52
per $C_4H_7O_2N$ (101)	H „:	7,34	6,93
	N „:	13,52	13,86

Per ottenere il trimero cristallino, gr. 25 del prodotto della reazione si trattano con gr. 75 di acido acetico diluito (gr. 25 di acido acetico glaciale e 50 cc. di acqua) e si riscalda all'ebollizione in apparecchio a ricadere per 4-5 ore. Dopo raffreddamento si aggiunge acqua fino ad intorbidamento e si lascia cristallizzare. Si separano così prismi incolori, che cristallizzati dall'alcool fondono a 101-102°.

All'analisi:

Gr. 0,2004 di sostanza dettero cc. 25 di N (a 15° e 734 mm.)

per $C_{12}H_{21}O_6N_3$ (303)	N %:	Trovato	14,28
		Calcolato	13,86

I. Gr. 0,1087 di sostanza disciolti in gr. 24,1632 di benzene dettero un abbassamento del punto di congelamento di 0°,075.

II. Gr. 0,1533 di sostanza disciolti in gr. 24,1632 di benzene dettero un abbassamento del punto di congelamento di 0°,105.

III. Gr. 0,217 di sostanza disciolti in gr. 24,1632 di benzene dettero un abbassamento dal punto di congelamento di 0°,145.

	I	II	III
Peso molecolare trovato:	299	302	309

Digitized by Google

La sostanza è solubile in alcool, etere, benzene, cloroformio e acetone, pochissimo solubile in etere di petrolio.

Riscaldando parti eguali del prodotto oleoso della reazione e di acido acetico in bagno di sabbia fino ad evaporazione completa dell'acido, il residuo è costituito da una massa colorata in giallo-chiaro, che col raffreddamento solidifica.

All'analisi:

Gr. 0,1940 di sostanza dettero gr. 0,3401 di CO_2 e gr. 0,1108 di H_2O; gr. 0,1265 di sostanza dettero cc. 15,3 di N (a 14° e 739 mm.).

		Trovato	Calcolato
per $C_{16}H_{28}O_8N_4$ (404)	C %:	47,79	47,52
	H „:	6,34	6,93
	N „:	13,99	13,86

I. Gr. 0,2164 di sostanza disciolti in gr. 23,4903 di benzene dettero un abbassamento del punto di congelamento di 0°,11.

II. Gr. 0,2881 di sostanza disciolti in gr. 23,4903 di benzene dettero un abbassamento del punto di congelamento di 0°,14.

	I	II
Peso molecolare trovato:	418	438.

Il prodotto resinoso è solubile nei comuni solventi organici tranne l'etere di petrolio.

Torino — Laboratorio di Chimica organica
della R. Scuola d'Ingegneria.

Digitized by Google

La fauna pliocenica di Masserano-Cossato (Biellese).

Nota della Dott.ssa ROSINA ZUFFARDI-COMERCI
presentata dal Socio nazion. residente C. F. Parona.

Lo studio e l'ordinamento della " *raccolta paleontologica Di Rovasenda* „, ricca di parecchie collezioni, specialmente del Cenozoico piemontese, e anche di altre regioni italiane, procedono regolarmente, ponendone sempre meglio in evidenza la ricchezza, la buona conservazione dei fossili — molti dei quali particolarmente preziosi, perchè rari o non ancora descritti — e le eccezionali cure dedicate dal colto e benemerito raccoglitore alla scelta intelligente delle forme degne di essere conservate e studiate.

Delle Collezioni che meritano uno studio particolareggiato e di essere menzionate, fa parte della " raccolta „ quella dei fossili del giacimento pliocenico (*piacenziano*) di Masserano che, essendo rimasti indeterminati, attendevano l'esame del paleontologo. La fauna di Masserano è da molti anni conosciuta: nella grande opera fondamentale Bellardi-Sacco (1). risulta già determinata e illustrata la maggior parte dei molluschi che la costiscono. E non sarebbe il caso di riparlarne, se il materiale in esame non permettesse di aggiungere buon numero di specie al già lungo elenco di quelle riscontrate nello spoglio dell'opera ora ricordata, nonchè di integrarlo coll'aggiungervi nomi di pochi altri fossili non appartenenti alla classe dei molluschi, e un breve studio critico d'interpretazione sopra una notevole forma di gasteropodo, del gen. *Chenopus*, ben rappresentato nella Collezione.

(1) Bellardi L. e Sacco F., *I Molluschi del Piemonte e della Liguria*, in XXX parti. Torino, 1872-1904.

Digitized by Google

Parmi inoltre utile far conoscere, nel suo insieme, questa fauna che certamente è fra le più ricche dei lembi pliocenici subalpini piemontesi e lombardi, e che presenta una composizione abbastanza diversa da quella propria dei giacimenti — pur ricchi di fossili — finemente argillosi; caratteristiche a questo riguardo le faune del Ponte di S. Quirico (M. Fenera) in Val Sesia e di Taino (Angera, Lago Maggiore) (1). Tali differenze sono evidentemente in rapporto con la natura del sedimento fossilifero di Masserano, sabbioso, micaceo, scarsamente argilloso; senza per altro presentare il carattere in generale arenaceo (tipico quello noto del Ponte dei Preti) dei depositi affioranti qua e là al margine dell'apparato morenico frontale d'Ivrea, o che dalle morene sono coperte (2). Né è da trascurare l'altra differenza faunistica, che, mentre le argille fossilifere plioceniche contengono numerosissimi foraminiferi, questi altri più o meno schiettamente sabbiosi ne sono, invece, quasi affatto privi. Nel caso particolare del giacimento di Masserano si può dire ancora che esso va contraddistinto con l'abbondanza dei *Pectunculus* e di valve numerose ed eccezionalmente grandi del *Pectunculus bimaculatus* Poli, sede più frequente delle coloniette dei briozoi. Così, si può segnalare, perchè specie piuttosto rara, l'*Eudolium subfasciatum* Sacc., forma miocenica.

Un lembo pliocenico che offre, come il deposito del ponte di Crescentino (Po), notevoli affinità di fauna con questo di Masserano è quello di Maggiora (Borgomanero), poco al di là della Sesia, nell'alto novarese, anche per il fatto del presentarsi in esso quella forma di *Chenopus* della quale è accennato in seguito. Dà motivo a questa osservazione l'esame di una piccola collezione di fossili, pure del Museo Rovasenda.

---

(1) Parona C. F., *Esame comparativo della fauna dei vari lembi pliocenici lombardi*, " Rend. R. Ist. Lomb. „, 1883; Parona C. F., *Valsesia e Lago d'Orta. Descrizione geologica.* " Atti Soc. It. Sc. Nat. „, XXIX, 1886.

(2) Recentemente il Museo Geologico torinese ebbe in dono un grosso campione fossilifero di arenaria pliocenica trovata a Mazzè (Canavese), nei lavori di una galleria (presa d'acqua per energia elettrica), a circa 60 o 70 m. sotto la sommità della collina.

Digitized by Google

Premesse queste osservazioni, presento l'elenco generale dei fossili componenti la fauna di Masserano, notando che le specie già indicate nell'opera Bellardi e Sacco sono in numero di 188 e che sono 80 quelle aggiunte in base allo studio della Collez. Rovasenda (1).

*Balanus concavus Bronn.

Murex torularius Lmk.
„ polymorphus Br.
Ocenebrina imbricata (Br.)
*Hadriania craticulata (L.)
Triton Doderleini d'Anc.
*Lampusia affine Desh.
*Streptochetus clavatus (Br.)
*Euthriofusus virgineus Grat.
*Aspa marginata (Mart.)
*Phos polygonum (Br.)
Pleurotoma turricula Br.
Surcula intermedia (Brn.)
* „ dimidiata (Br.)
Genota Bonnanii Bell.
Cymatosyrina incrassata (Duj.)
Clavatula rustica (Br.)
„ interrupta (Br.)
*Bathytoma cataphracta (Br.)
Bellardiella emarginata (Donov.)
* „ ? ligustica (Bell.)
*Perotoma histria (Jan.)
„ elegans (Donov.)
Teres anceps (Eichw.)
„ turritelloides Bell.
Raphitoma hispidula (Jan.)
„ submarginata (Bon.)
„ turgida (Forb.)
„ attenuata (Mont.)
„ megastoma (Brugn.)
*Pseudotoma intorta (Br.)
Nassa mutabilis (L.)
Niotha clathrata (Born)
„ Canthrainii (Bell.)
Niotha scalaris (Bors.)
Hima bugellensis (Bell.)
„ planicostata (Bell.)
„ serraticosta (Bronn.)
„ asperata (Cocc.)
Amyda semistriata (Br.)
„ Chiereghinii (Bell.)
Latirus bugellensis Bell.
*Cancilla planicostata (Bell.)
Uromitra plicatula (Br.)
Cypraecassis marginata (De-Serr.)
Semicassis levigata (Defr.)
Tuberculodolium stephaniophorum (Font.)
*Eudolium subfasciatum Sacc.
Malea orbiculata (Br.)
Ficula geometra (Bors.)
„ reticulata Lk.
Natica epiglottina Lk.
Naticina catena Da-Costa
Tectonatica textula (Bon.)
Neverita Josephinia Risso
*Cryptostoma striatum (De Serr.)
*Adiscoacrilla Coppii (De-Boury)
*Terebra acuminata (Bors.)
Fuscoscala Turtonis (Turt.)
Hirtoscala elegans (Risso)
Linctoscala frondicula (Wood W.).
Subula fuscata (Br.)
Myurella pliocenica (Font.)
* „ reticularis (Pecch.).
Subularia subulata (Don.)
*Pyrgolidium internodulum (Wood W.)
Rhombostoma striata Segu.
Niso terebellum (Chemn.).

(1) Le specie segnate con l'asterisco sono citate qui, per la prima volta, come appartenenti alla fauna di Masserano.

Digitized by Google

Odontostomia conoidea (Br.)
Turritodostomia plicata (Mont.)
Macrodostomia submicaelis Sacc.
Auristomia fusulata Sacc.
Ondina? bugellensis Sacc.
Spica Monterosatoi Sacc.
Pyrgulina interstinta (Mont.)
Tragula fenestrata (Forb.)
Chemnitzia Campanellae (Phil.)
Turbonilla lactea (L.)
" postacuticostata? Sacc.
Strioturbonilla densecostata (Phil.)
Pygostelis rufa (Phil.)
Rhingiculella auriculata (Mén.)
*Solarium simplex Brn.
Conuspirus antediluvianus (Brug.)
Chelyconus pelagicus (Br.)
" striatulus (Br.)
" bitorosus (Font.)
*Rhizoconus? virginalis (Br.)
*Strombus coronatus (Defr.)
Chenopus uttingerianus (Risso)
" pespelecani (L.)
" peraraneosus Sacc.
Erato laevis (Don.)
*Solatia piscatoria (Gmel.)
" hirta (Br.)
Bivetia cancellata (L.)
Sveltia varicosa (Br.)
Cerithium vulgatum Brug.
* " varicosum Br.
" crenatum Br.
Bittium reticulatum (Da-Costa)
" exiguum (Montrs.)
" spina (Partsch.)
Monophorus perversus (L.)
Rissoia lineolata Micht.
Apicularia sulzeriana (Risso)
Axinus reticulatus (Mont.)
Rissoina pusilla (Br.)
Zebinella decussata (Mont.)
Turritella tricarinata (Br.)
Haustator vermicularis (Br.)
* " tornatus (Br.)
* " ? Strobelianus (Cocc.)
*Vermetus Deshayesi (May.)
*Tenagodes anguinus (L.)
Torculoidella subvaricosa Sacc.
Petaloconcus intortus (Lk.)
*Xenophora crispa (Koenig.)
*Calyptraea chinensis (L.)
Crepidula gibbosa Defr.
Janacus crepidulus (L.)
*Capulus hungaricus (L.)
Brocchia laevis Brn.
Smaragdia viridis (L.)
* " virgata (Micht.)
Steganomphalus pullus (L.)
*Bolma rugosa (L.)
Oxystele patula (Br.)
Gibbula magus (L.)
Forskalia fanulum (Gmel.)
*Magulus ardens (V. Salis)
Ampullotrochus granulatus (Born.)
" ? cingulatus (Br.)
*Retusa decussata (Bon.)
Scaphander lignarius L.
Jujubinus striatus (L.)
Strigosella strigosa (Gmel.)
Actaeon tornatilis (L.)
" semistriatus (Fèr.)
Actaeonidea achatina (Bon.)
Volvula acuminata (Brug.)
Roxania utriculus (Br.)
*Tinostoma Woodi (Hörn.)
Bulla subampulla D'Orb.
Haminea hydatis (L.)
Bullinella cylindracea (Penn.)
Cylichnina umbilicata (Montg.)
" pliocrassa Sacc.
Dentalium sexangulum Schrit.
*Antale novemcostatum Lmk.
" ? dentale (L.)
*Gadila gadus (Montg.)
*Ostrea edulis (L.)
*Pycnodonta cochlear (Poli)
Anomia ephippium L.
*Monia striata (Br.)
Aequipecten opercularis (L.)
Lissochlamys excisa (Brn.)
Flabellipecten flabelliformis (Br.)
" nigromagnus Sacc.

Digitized by Google

Flabellipecten Bosniaseckii (De St. et Pant.)
Pecten jacobeus (L.)
„ planomedius Sacc.
Radula paucicostata (Sow.)
*Mantellum inflatum (Chemn.)
* „ hians (Gmel.)
*Avicula hirundo (L.)
Pinna pectinata L.
*Modiola adriatica Lmk.
„ mytiloides Brn.
Modiolula phaseolina Phil.
Arca Noe L.
Barbatia modioloides (Cantr.)
*Soldania mytiloides (Br.)
Anadara diluvii (Lk.)
Axinaea bimaculata (Poli)
„ pilosa (L.)
„ insubrica (Br.)
Nucula nucleus (L.)
„ placentina Lk.
*Ledina Bonellii (Bell.)
Glans intermedia (Br.)
Actinobolus antiquatus (L.)
Cardium aculeatum L.
„ echinatum L.
„ erinaceum Lk.
* „ paucicostatum Sow.
Trachycardium multicostatum (Br.)
Ringicardium hians (Br.)
Papillicardium papillosum (Poli)
Laevicardium norvegicum Swains
„ cyprium (Br.)
Nemocardium striatulum (Br.)
Chama gryphoides (Gualt.) L.
Isocardia cor (L.)
Callista chione (L.)
* „ pedemontana (Lk. et Ag.)
Pitar rudis (Poli)
Amiantis Brocchii (Desh.)
Ventricola multilamella (Lk.)
„ alternans (Bon.)
Chamelaea gallina (L.)
Circomphalus plicatus (Gmel.)
Timoclea ovata (Pennt.)
*Clausinella scalaris (Br.)
Gouldia minima (Montg.)
Dosinia lupinus (L.)
Callistotapes vetulus (Bast.)
Psammobia färoënsis (Chemntz.)
Solenocurtus candidus (Ren.)
Azor antiquatus (Pultn.)
*Ensiculus cultellus (L.)
Spisula subtruncata (Da Costa)
Lutraria lutraria (L.)
Corbula gibba Olivi.
* „ revoluta (Br.)
Glycimeris Faujasi (Mén.)
Gastrochaena dubia (Pennt.)
Lucina fragilis (Phil.)
Megaxinus ellipticus (Bors.)
„ transversus (Brn.)
„ bellardianus (Mayr.)
Dentilucina orbicularis (Desh.)
„ borealis (L.)
„ Meneghinii (Desh. et Pant.)
Myrtea spinifera (Montg.)
Jagonia reticulata (Poli)
Loripes lacteus (L.)
Tellina distorta Poli
*Tellinula incarnata (L.)
Moerella donacina (L.)
Macomopsis elliptica (Br.)
Peronaea planata (L.)
Oudardia compressa (Br.)
Arcopagia corbis (Brn)
* „ telata (Bon.)
Syndesmia alba (Wood W.)
* „ longicollus (Sc.)
Abra stricta (Br.)
Thracia pubescens (Pultn.)
„ papiracea (Poli)
„ convexa? (Wood W.)
Stirpulina bacillum (Br.)

*Terebratula ampulla (Br.)

*Lichenopora mediterranea Bl.
*Adeona Heckli Rss.
*Hippaliosina clavula Mnf.
*Schizotheca stellata Seg.
*Peristomella coccinea Abild.

Digitized by Google

*Schizobrachiella sanguinea Norm.
*Lunularia androsaces Micht.
*Callopora Dumerilii Aud.
*Cupuladria canariensis Bk.
*Conopeum Lacroixii Cip.
*Electra elliptica Rss.
* „ concatenata Rss.
*Aetea anguina (L.)
*Diaperaecia dilatans John.

*Ditrupa cornea (L.)
*Protula sp.

*Cladocora Michelottii E. H.

*Cliona celata Top.

*Polystomella striato-punctata Fichtel et Moll.
*Polystomella crispa (L.) (1)
*Amphistegina Lessoni d'Orb.
*Polymorphina gibba d'Orb.
*Robulina calcar (L.)
*Adelosina Duthiersi Sclumb.
*Quinqueloculina oblonga d'Orb.

Osservazioni sul *Chenopus peraraneosus* Sacco.

L'esame di numerosi esemplari di *Ch. pespelecani*, *Ch. Uttingerianus* Risso e *Ch. Uttingerianus* var. *peraraneosa* Sacc. mi permette di tornare su un argomento già ampiamente trattato dal Prof. Vinassa, per quanto riguarda affinità e differenze tra le due specie (2), per segnalare qualche particolare di notevole significato, in rapporto anche al valore di specie o di varietà da attribuire alla forma che il Prof. Sacco distinse col nome di *peraraneosa* (3). Osservo innanzi tutto che *Chenopus Uttingerianus*, *Ch. pespelecani*, *Ch. Uttingerianus* var. *peraraneosa*, con le rispettive loro caratteristiche distintive, coesistono nello stesso giacimento piacenziano di Masserano; ciò che non si accorda con l'affermazione del Vinassa, il quale ritiene il *Ch. Uttingerianus* specie di mare profondo, e il *Ch. pespelecani* invece di litorale: sta il fatto che, nella fauna di Masserano, parecchie altre specie, particolarmente significative, danno impronta di facies litoranea.

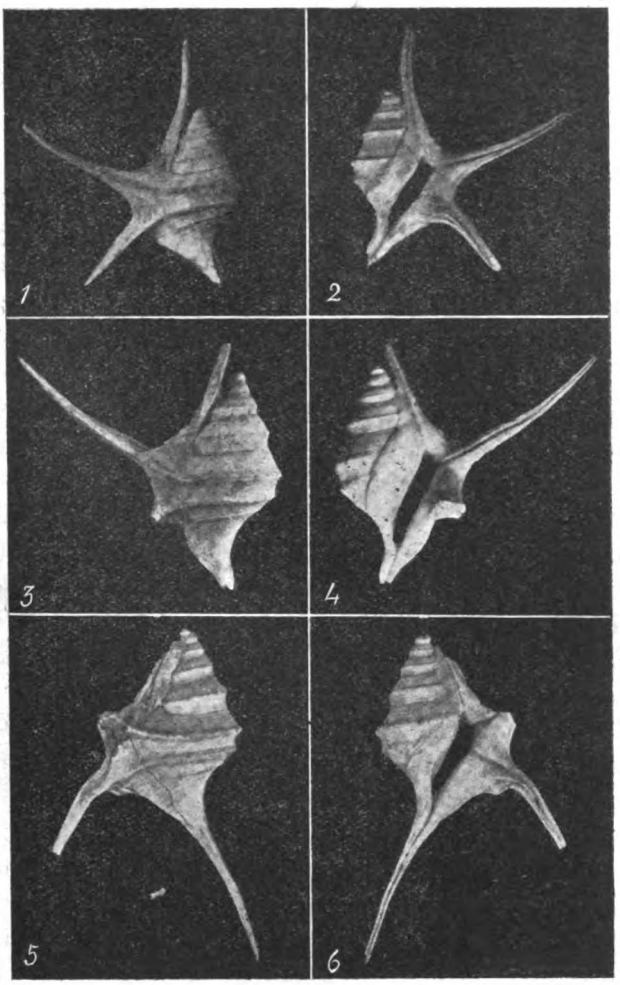
(1) Devo alla cortesia e competenza della collega Sig.na Dott. Anna Martinotti la determinazione dei Foraminiferi.

(2) Vinassa de Regny P. E., *Il Chenopus Uttingerianus* Risso *e il Chenopus pespelecani* L. *del pliocene italiano.* " Boll. Soc. Malacologica ital. „ vol. XX, pagg. 21-44, 1896.

(3) Sacco F., *I Molluschi terziarii del Piemonte e della Liguria*, parte XIV, pag. 26. Tav. II, fig. 23, 1893.

Digitized by Google

La forma *peraraneosa*, negli esemplari di Masserano (figg. 3 e 4), si presenta con caratteri più differenziati di quanto appaia nella diagnosi e nella figura data dal Prof. Sacco. Pur condividendo



le opinioni del Prof. Vinassa sul concetto giustamente ampio di specie e sulla problematica utilità della moltiplicazione eccessiva delle specie e delle varietà, io ritengo che la forma *peraraneosa* debba essere conservata non solo, ma portata anzi al

Digitized by Google

grado di specie. Mi induce a questo modo di vedere lo studio di buon numero di individui conservati nella Collezione Rovasenda, provenienti dai due giacimenti d'identica facies litologica e paleontologica di Masserano e Maggiora. In questi esemplari, infatti, la lunghezza delle *dita*, la quale, anche in esemplari con dita non integre, giunge a 30 mm.; il ridursi in estensione dell'area interdigitale (che è massima nel *Ch. pespelecani*, media nel *Ch. Uttingerianus*, minima nella forma *perararaneosa*); la forma delle dita esili, leggermente arcuate ed acuminate a guisa di spinosità; le dimensioni degli esemplari quasi costantemente minori e l'aspetto sempre più delicato; sono tutte prerogative che valgono come caratteri differenziali per questa forma in confronto con le due specie, sia nei loro rappresentanti fossili come nei viventi, quali sono ad esempio figurati nella Monografia del Roussillion (1). I caratteri dell'angolo apicale e dell'accrescimento spirale, per quanto in diminuite proporzioni, seguono sufficientemente quelli del *Ch. Uttingerianus*, nei limiti di variabilità che a questi caratteri debbonsi concedere (da 16 a 20 mm. di altezza si contano 7 anfratti); è invece ben definita la differenza per quanto riguarda la prima carena dell'ultimo anfratto: essa è a rilievo continuo e rugoso, con la quasi scomparsa dei nodi, ben visibili, invece, nel *Ch. pespelecani* e rintracciabili ancora nel *Ch. Uttingerianus*. Le dita sono tutte e quattro assai lunghe e subeguali, in nessun esemplare completamente conservate nella loro lunghezza totale — evidentemente in causa della loro grande fragilità —; esse irradiano dall'espansione labiale con angolo assai ampio; la prima, diretta verso l'apice, supera l'altezza della spira e la sovrasta, incurvata verso il fianco posteriore. Tutte le dita sono percorse interamente dal canale boccale.

Considerando che i caratteri differenziali tra la forma *perararaneosa* e le due specie considerate sono più notevoli che non le differenze tra le due specie stesse, mi sembra di poter concludere che al *Ch. perararaneosus* Sacco possa attribuirsi il valore di specie a sè.

---

(1) Bucquoy, Dautzenberg, Dollfus, *Mollusques marins du Roussillon*. Tome I: *Gasteropodes*, Tav. 23. Paris, 1886-87.

Digitized by Google

Queste osservazioni e considerazioni valgono anche — mi sembra — riguardo alla forma del pliocene di M. Mario attribuita dal Dr. Cerulli-Irelli al *Ch. Uttingerianus* (1).

In complesso la forma descritta, e qui figurata, presenta rimarchevoli affinità col più piccolo *Chenopus mirandus* Cossmann et Peyrot (2) (tipo del nuovo sottogenere *Triacantium* degli stessi Autori) dell'Aquitaniano, così da lasciar pensare alla possibilità, che il pliocenico *Ch. peraraneosus* ne sia un derivato evolutivo.

Il *Ch. peraraneosus* Sacco si trova, con le medesime caratteristiche di quelli di Masserano (figg. 3 e 4) e di Maggiora, per quanto a caratteri leggermente attenuati, ad Albenga (Liguria) (figg. 1 e 2), Rocca d'Arazzo (Astigiano) (figg. 5 e 6). Gli esemplari esaminati, provenienti dalle varie località, sono 18.

---

(1) Cerulli-Irelli S., *Fauna malacologica mariana.* " Palaeontographia Italica „, XVII, pag. 274, Tav. XXVI, figg. 26-28, 1911.

(2) M. Cossmann et A. Peyrot, *Conchologie néogénique de l'Aquitaine* (" Actes de la Soc. Linn. de Bordeaux „, LXXIV-LXXV), Tom. IV, livr. II, pag. 346, tav. VIII, figg. 20-21, 1924.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 16 Giugno 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: PEANO, GRASSI, PANETTI, SACCO, POCHETTINO e il Segretario REPOSSI;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: RUFFINI, BRONDI, EINAUDI, VIDARI, JANNACCONE e il Segretario FAGGI.

Scusano l'assenza i Soci: MATTIROLO, VALLAURI, STAMPINI e LUZIO.

Il Presidente si onora di comunicare all'Accademia che è giunta l'approvazione Reale alla nomina di S. A. R. il Duca d'Aosta a Socio nazionale residente e che il relativo diploma sarà in questi giorni consegnato a S. A.

Il Presidente comunica quindi un telegramma di S. E. BOSELLI, giunto in risposta al telegramma inviatogli dall'Accademia in occasione del suo 91° genetliaco, ed i telegrammi di ringraziamento del Dott. Mons. GAMBARO e Prof. JEMOLO, ai quali fu comunicata l'assegnazione del Premio Gautieri.

Digitized by Google

Il Presidente invita il Tesoriere ad esporre i dati del Bilancio consuntivo 1928-29. Il Socio PANETTI premette che le spese straordinarie che furono fatte nel corso dell'esercizio si poterono affrontare in grazia del fondo pure straordinario concesso dal Ministero e dal Municipio per i buoni uffici del Socio RUFFINI e lo ringrazia.

Il Bilancio consuntivo viene in seguito letto ed approvato senza discussione.

Il Tesoriere legge poi il Bilancio preventivo 1929, il quale viene pure approvato dopo alcune osservazioni dei Soci EINAUDI e RUFFINI sugli assegni al Tesoriere ed ai Segretari, cui rispondono il Tesoriere e il Presidente.

Il Tesoriere infine dà relazione dei Bilanci dei vari Premi accademici, bilanci che si presentano complessivamente in buone condizioni.

L'Accademia, associandosi al Presidente, tributa un vivo plauso al Tesoriere.

Il verbale è letto ed approvato seduta stante.

Gli Accademici Segretari:
EMILIO REPOSSI
ADOLFO FAGGI

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 23 Giugno 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, PANETTI, PONZIO, HERLITZKA, POCHETTINO, BOGGIO, GARELLI, VALLAURI e il Segretario REPOSSI.

Scusano la loro assenza i Soci: D'OVIDIO e MAJORANA.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio HERLITZKA presenta in omaggio all'Accademia il Vol. IV della Serie II delle *Ricerche sperimentali,* pubblicate dal Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Torino sotto la sua direzione.

Il Socio PANETTI presenta pure in omaggio all'Accademia un suo opuscolo dal titolo: *La navigazione aerea come mezzo di trasporto*; e il Socio MATTIROLO un opuscolo di D. BOIS.

Il Socio PEANO presenta, per l'inserzione negli *Atti,* una Nota della dott.ssa Maria CIBRARIO, dal titolo: *Proposizioni universali e particolari e definizione del limite*; ed il Socio GARELLI

Digitized by Google

un'altra Nota dei dott. Michele Giua e Giovanni Racciu, dal titolo: *L'influenza dei sostituenti sulla stabilità di alcuni composti ciclici.*

Il Segretario Repossi presenta, per l'inserzione negli *Atti*, anche a nome del Socio Ponzio, una Nota della dott.ssa Elsa Debenedetti, dal titolo: *Studio cristallografico dell'epidoto del Giasset in Val d'Ala (Piemonte)*; ed una sua Nota dal titolo: *Studio mineralogico dei terreni agrari del Vercellese,* e ne illustra brevemente il contenuto.

Il Presidente comunica che sono pervenute, per la pubblicazione, una Nota del Socio Majorana, dal titolo: *Attenuazione dissimmetrica di energia raggiante in un mezzo assorbente*; ed una Nota del Socio corrisp. Colomba, dal titolo: *Osservazioni litologiche e mineralogiche sul giacimento di Castiglione (Traversella).* Entrambe compariranno negli *Atti*.

Il Presidente comunica in seguito una lettera del Socio Majorana, il quale, riconoscendo di non potere per i propri impegni prender parte regolarmente ai lavori dell'Accademia, prega di volerlo passare alla categoria dei Soci nazionali non residenti; ciò che, a termine dello Statuto, viene fatto.

La Classe di Scienze fisiche può quindi disporre di un nuovo posto di Socio nazionale residente.

Il Segretario riassume brevemente una circolare dell'*Institut International de Coopération intellectuelle,* nella quale questo domanda il parere dell'Accademia circa la possibilità e l'opportunità di creare a Torino e in Italia dei centri di cooperazione intellettuale. Il Presidente mette la circolare a disposizione degli Accademici e incarica il Socio Peano di raccogliere i pareri dei Soci e di riferirne alla Presidenza, perchè questa possa rispondere all'invito ricevuto.

Il Presidente infine, constatando che nessun Socio ha presentato lavori da pubblicare nelle *Memorie* dell'Accademia, propone che si proceda alla pubblicazione nelle *Memorie* stesse

Digitized by Google

della terza ed ultima parte della " *Flora Sardoa* „ *di M. A. Plazza (1795), illustrata dal Prof.* A. Terracciano, ora defunto ; della quale opera, le prime due parti furon già pubblicate nelle nostre *Memorie*. La relazione favorevole alla pubblicazione essendo già stata approvata, l'Accademia accetta senz'altro la proposta del Presidente.

Il presente verbale è letto e approvato seduta stante.

Digitized by Google

LETTURE

Proposizioni universali e particolari, e definizione di limite.

Nota della Dott.ssa MARIA CIBRARIO
presentata dal Socio nazionale residente G. Peano.

Varie proposizioni di matematica, fra cui la definizione di limite, contengono una successione di affermazioni universali e particolari. Scambiando le affermazioni universali colle particolari, e mutando l'ordine loro, si muta il valore delle proposizioni. Per esaminare queste questioni sono molto utili le notazioni di logica matematica.

Notazioni di logica.

Se a e b sono delle classi, $a \supset b$ indica la proposizione universale: " ogni a è b ". Esempio: " uomo $\supset$ mortale "; " quadrato $\supset$ rettangolo "; " multiplo di 6 $\supset$ multiplo di 2 ".

$a \supset b$ si può anche leggere: " la classe a è contenuta nella classe b ", ossia b contiene a. Il segno $\supset$ è appunto l'iniziale invertita della parola *contiene*.

Il segno $\supset$, con questo valore, si trova in GERGONNE, 1816, ed in ABEL. Usato nel *Formulario Matematico*, è divenuto di uso quasi universale fra i cultori della logica matematica.

$a \cap b$ indica la classe comune agli a e ai b. Il segno $\cap$ si legge *e*, ed ha alcune proprietà del segno $\times$ (moltiplicato) dell'aritmetica, ma non si può confondere con esso. Invece di $a \cap b$ scriveremo semplicemente $a\,b$, quando non ci sia equivoco. Esempio:

$$\text{rettangolo} \cap \text{rombo} = \text{quadrato};$$
$$(\text{multiplo di } 2) \cap (\text{multiplo di } 3) = (\text{multiplo di } 6).$$

In queste proposizioni si trova il segno $=$ col significato logico, più generale di quello aritmetico.

Digitized by Google

$\exists a$ indica la proposizione " esistono degli a „, o " la classe a non è nulla „. Quindi $\exists (a \frown b)$ vale " esistono degli a che sono b „; cioè esprime la proposizione particolare: " qualche a è b „.

$x \in a$ indica la proposizione singolare: " x è un a „. Il segno $\in$ è l'iniziale della parola greca *ἐστί*. Esempio:

$$6 \in (\text{multiplo di } 3).$$

I segni $\supset$, $\exists$, $\in$ rappresentano le proposizioni universale, particolare, singolare, secondo Aristotele: *καθόλου, ἐν μέρει, καθ' ἕκαστον.*

Se p_x è una proposizione contenente la variabile x, cioè una condizione in x (p. es. un'equazione), allora $x \ni p_x$ indica la classe degli x che soddisfano la condizione p_x.

In luogo di:

$$(x \ni p_x) \supset (x \ni q_x)$$

" ogni soluzione della condizione p_x è pure soluzione della condizione q_x „, si scrive:

$$p_x \cdot \supset_x \cdot q_x ,$$

" da p_x si deduce, per ogni x, q_x „.

E se l'ipotesi p_x e la tesi q_x non contengono altra lettera variabile, oltre la x, si può sottintendere l'indice x al segno $\supset$, e scrivere:

$$p_x \cdot \supset \cdot q_x$$

" da p si deduce q „.

I punti separano l'ipotesi dal segno di deduzione, e questo dalla tesi; e fanno ufficio equivalente a quello delle parentesi. La notazione dei punti, più comoda, è dovuta a Leibniz. I punti ripetuti : .˙. equivalgono alle parentesi ripetute.

Col segno $\ni$ una deduzione si trasforma in proposizione universale tra classi.

Ricorderò ancora che:

$$x \ni (x \in a) = a$$

" gli x che soddisfano alla condizione $x \in a$, formano la classe a „. Ciò spiega l'origine del segno $\ni$ dal segno $\in$ rovesciato, perchè le due operazioni sono inverse.

Digitized by Google

Nell'espressione " $x \ni (p_x)$ ", " gli x che soddisfano la condizione p_x ", la lettera x è *apparente*, cioè quell'espressione non muta se cambiamo il nome della variabile x in y. Parimenti, sono apparenti le lettere che figurano come indici al segno di deduzione.

Nell'enunciato completo di un teorema, tutte le lettere sono apparenti.

Proposizioni congiunte alla definizione di limite.

Sia x una successione di quantità reali. In virtù dell'identità:

$$\lim x = a \,.=.\, \lim \operatorname{mod}(x - a) = 0\,,$$

potremo limitarci a considerare il limite 0 di una successione di quantità positive o nulle.

In alcune questioni seguenti, conviene anche considerare l'∞ come una quantità. Perciò introdurremo i simboli:

Q = quantità (positiva),
Q_0^{∞} = Q, compreso lo zero e l'infinito,
N_0 = numero naturale, compreso lo zero.

Supponiamo che x sia una successione di Q_0^{∞}, i cui indici siano 0, 1, 2..., cioè $x_0, x_1, x_2 \ldots$ sono Q_0^{∞}. Nei simboli del Formulario:

$$x \in \mathrm{Q}_0^{\infty}\ \mathrm{F}\ \mathrm{N}_0$$

" x è un Q_0^{∞} funzione degli N_0 ".

Per definire la proposizione $\lim x = 0$, occorre introdurre tre variabili m, n, h e dire che nell'ipotesi: $m \in \mathrm{N}_0 \,.\, n \in \mathrm{N}_0 \,.\, h \in \mathrm{Q}$, seguirà la tesi: $x_{m+n} < h$.

Ognuna delle lettere m, n, h può essere accompagnata dall'affermazione universale o particolare, cioè da uno dei segni $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{H}$, vale a dire da una delle due parole *ogni* e *qualche*, così che si avranno otto accoppiamenti delle lettere m, n, h coi segni $\mathfrak{O}\,\mathfrak{H}$. Le lettere m, n, h si possono permutare in 6 modi; ma siccome scegliemmo le lettere in modo che ipotesi e tesi fossero sim-

Digitized by Google

metriche in m ed n, potremo sempre supporre che la lettera m preceda la n; avremo così a considerare solo tre permutazioni m, n, h; m, h, n; h, m, n. Si presentano così 24 proposizioni. Che queste proposizioni abbiano vario significato, fu osservato da varii autori. Vedasi ad esempio:

PEANO, *Sulla definizione di limite,* " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, 1913;

CASSINA, *Sul concetto di limite,* " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „, 1928.

Nel presente lavoro ci proponiamo appunto di studiare le proposizioni differenti, così ottenute.

Considero dapprima la permutazione degli indici m, n, h.

(1) $\supset_m \supset_n \supset_h$. Così indico la disposizione: universale in m, universale in n, universale in h. In disteso:

$$m \in N_0 . \supset_m . \therefore . n \in N_0 . \supset_n : h \in Q . \supset_h . x_{m+n} < h ,$$

" per ogni m, si ha che per ogni n, ne risulta che per ogni h sempre si deduce la tesi „. Ma la proposizione:

$$h \in Q . \supset_h . x_{m+n} < h$$

" x_{m+n} è minore di ogni quantità prefissata h (tanto piccola quanto si vuole) „ significa: $x_{m+n} = 0$. Quindi la proposizione si riduce a:

$$m, n \in N_0 . \supset_{m,n} . x_{m+n} = 0 ,$$

" qualunque siano m ed n, sempre $x_{m+n} = 0$ „, ossia tutti i termini della successione sono nulli.

(2) $\exists_m \supset_n \supset_h$ " per qualche m si ha che per ogni n e per ogni h risulta la tesi „, per quanto si è detto in (1) vale:

$$\exists N_0 \frown m \ni [n \in N_0 . \supset_n . x_{m+n} = 0]$$

" si può determinare un indice m, dal quale in poi tutti i valori della funzione sono nulli „.

Indicando Vx il valore intero di x (o Ex di altri autori), un esempio è dato dalla funzione $V(5x)$, ove ad x attribuiamo i valori $1, 2 \ldots$ Essa assume i valori $5, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0 \ldots$

Digitized by Google

In una nota:

G. PEANO, *Sugli ordini degli infiniti,* " R. Accademia dei Lincei „, 16-VI-1910, l'Autore fa corrispondere ad ogni successione x un nuovo ente, che chiama " fine x „, e che definisce così:

$$\text{fine } x > \text{fine } y \,.\, = \exists\, N_0 \cap m \ni (n \in N \,.\, \supset_n \,.\, x_{m+n} > y_{m+n})$$

„ $=$ „ „ „ $=$ „

„ $<$ „ „ „ $<$ „

Si definiscono le operazioni algebriche:

$$\text{fine } x + \text{fine } y = \text{fine } (x + y),$$
$$\text{fine } x \times \text{fine } y = \text{fine } (x \times y), \text{ ecc.}$$

I fini delle successioni non soddisfano al postulato di Archimede. Con questa convenzione, la proposizione (2) si riduce a:

$$0 = \text{fine } x.$$

Esiste una regola di logica, che dirò *A*:

A. Da una proposizione universale si deduce la particolare.

Nel nostro caso, da $\supset_m$ si deduce $\exists_m$, e quindi (1) $\supset$ (2).

(3) $\supset_m \exists_n \supset_h$ " per ogni m e per qualche n e per ogni h si ha la tesi „. Per quanto si è detto in (1) vale:

$$m \in N_0 \,.\, \supset_m \,.\, \exists\, N_0 \cap n \ni [x_{m+n} = 0].$$

" Comunque sia l'indice m si può determinare un indice successivo $m + n$, tale che il valore corrispondente di x sia zero „.

Per esempio la funzione $x - (\sqrt{x})^2$, ove x assume i valori $0, 1, 2 \ldots$, costituisce una successione

$$0, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1 \ldots,$$

che soddisfa alla condizione (3).

Dalla proposizione (2) si deduce la (3) conformemente ad una regola di logica (che però non sta scritta nei trattati di logica scolastica).

Digitized by Google

B. Dalla proposizione particolare-universale segue la proposizione universale-particolare.

Nel nostro caso, da $\exists_m \supset_n$ segue $\supset_n \exists_m$, e permutando m ed n, a causa della loro simmetria, si ha $\supset_m \exists_n$.

Se indico con Fine x la classe dei valori di fine z, ove z è una successione estratta dalla x, cioè composta di alcuni termini di x, allora la proposizione (3) si può esprimere:

$$0 \in \text{Fine } x.$$

La classe Fine $[x - (\text{V} \restriction x)^2]$ è costituita da tutti gli N_0.

(4) $\exists_m \exists_n \supset_h$ " per qualche m e per qualche n e per ogni h vale la tesi „ significa:

$$\exists \text{N}_0 \cap m \ni [\exists \text{N}_0 \cap n \ni (x_{m+n} = 0)],$$

cioè qualche termine della successione x è nullo.

Se indico con $x(\text{N}_0)$ l'insieme, o classe, dei valori assunti da x, al variare dell'indice nel campo N_0, la proposizione (4) si riduce a:

$$0 \in x(\text{N}_0),$$

" 0 è uno dei valori assunti da x „.

Dalla (3) si deduce la (4) colla regola *A*.

Riassumendo: (1) $\supset$ (2) $\supset$ (3) $\supset$ (4).

(5) $\supset_m \supset_n \exists_h$ " per ogni m e per ogni n e per qualche h vale la tesi „, e in disteso:

$$m \in \text{N}_0 . \supset_m : n \in \text{N}_0 . \supset_n . \exists \text{Q} \cap h \ni (x_{m+n} < h).$$

Ora la proposizione $\exists \text{Q} \cap h \ni (x_{m+n} < h)$ significa che x_{m+n} è finito. Dunque la proposizione (5) significa " ogni termine è finito „.

(6) $\exists_m \supset_n \exists_h$ significa " da un certo posto in poi, tutti i termini sono finiti „.

(7) $\supset_m \exists_n \exists_h$ significa: " da ogni posto in poi la successione ha valori finiti „.

Digitized by Google

(8) $\exists_m \exists_n \exists_h$ significa: " la successione ha dei valori finiti $_{\eta}$.

Per la regola *A* si ha:

$$(1) \supset (5), \quad (2) \supset (6), \quad (3) \supset (7), \quad (4) \supset (8),$$

e per le regole *A* e *B* si ha:

$$(5) \supset (6) \supset (7) \supset (8).$$

Considero ora la permutazione degli indici m, h, n:

(9) $\supset_m \supset_h \supset_n$ vale la (1) $\supset_m \supset_n \supset_h$, in virtù di una regola di logica:

C. Due affermazioni universali successive si possono commutare.

(10) $\exists_m \supset_h \supset_n$ vale la (2) $\exists_m \supset_n \supset_h$, perchè basta commutare $\supset_h \supset_n$ in $\supset_n \supset_h$, colla regola *C*.

(11) $\supset_m \exists_h \supset_n$ " per ogni m e per qualche h e per ogni n vale la tesi $_{\eta}$ e in disteso:

$$m \in N_0 . \supset_m . \exists Q \cap h \ni [n \in N_0 . \supset_n . x_{m+n} < h]$$

significa " comunque si prenda m si può determinare un h maggiore di ogni valore di x_{m+n} $_{\eta}$, ossia " il limite superiore dei valori di x da ogni m in poi, è finito $_{\eta}$.

Se, come si è supposto, x è una successione, cioè funzione degli N_0, questa proposizione dice che il limite superiore di tutti i valori di x è finito, $l'x(N_0) \in Q_0$. Ma se supponiamo invece che x sia funzione di tutti i numeri positivi, cioè $x \in Q F Q$, questa proposizione (11) può essere vera, senza che sia finito il limite superiore dei valori di x. Per esempio la funzione $1/x$, ove $x \in Q$, soddisfa alla condizione (11), ma il limite superiore dei suoi valori è ∞.

Colla regola *A* si ha (1) $\supset$ (11), e colla regola *B* si ha (11) $\supset$ (5).

(12) $\exists_m \exists_h \supset_n$ significa: " da un certo m in poi, il limite superiore dei valori di x è finito $_{\eta}$.

Digitized by Google

Colla regola A si ha: (2) $=$ (10) $\supset$ (12), (11) $\supset$ (12), e per la regola B si ha: (12) $\supset$ (6).

(13) $\supset_m \supset_h \exists_n$ " per ogni m e per ogni h e per qualche n segue la tesi „ e per disteso:

$$m \in N_0 . \supset_m : h \in Q . \supset_h . \exists N_0 \cap n \ni [x_{m+n} < h].$$

La proposizione $\exists N_0 \cap n \ni [x_{m+n} < h]$ significa: " qualche valore di x, dal posto m in poi, è minore di h „, cioè $l_1 x (m + N_0) < h$, " il limite inferiore dei valori di x da m in poi, è minore di h „.

E se ciò avviene per ogni h, cioè $\supset_h \exists_n$, segue: " il limite inferiore dei valori di x, da m in poi, è zero „. E infine $\supset_m \supset_h \exists_n$ vale:

$$m \in N_0 . \supset_m . l_1 x (m + N_0) = 0 ,$$

e questo si esprime nel Formulario con:

$$0 \in \mathrm{Lm}\, x$$

" lo zero appartiene alla classe limite degli x „.

Se x è una successione di numeri reali, e a un numero reale, si definisce:

$$a \in \mathrm{Lm}\, x . = . 0 \in \mathrm{Lm} \bmod (x - a).$$

La classe $\mathrm{Lm}\, x$ è la classe formata dai limiti di tutte le successioni che si possono estrarre da x ed aventi limite.

Mentre una successione può mancare di limite, esiste sempre la classe limite, includendovi anche l'∞. La classe limite si trova in CAUCHY (V. *Formulario*, tomo V, pagg. 215, 222 e 224). Poi l'idea di classe limite andò quasi in disuso nei trattati di calcolo.

Però i due elementi $\max \mathrm{Lm}\, x$ (massimo della classe limite) e $\min \mathrm{Lim}\, x$ (minimo della classe limite) con nomi diversi e definiti direttamente furono considerati da DINI (a. 1878) e da altri autori.

Sulla classe limite vedasi:

G. SANNIA, *I limiti di una funzione in un punto limite del suo campo,* " Mem. Acc. di Torino „, 25 aprile 1915.

Per la regola di logica B si ha (3) $\supset$ (13).

Digitized by Google

(14) $\exists m \supset_h \exists_n$, per quanto si è visto nella spiegazione della (13), significa:

$$\exists N_0 \cap m \ni [l_1 x (m + N_0) = 0]$$

" esiste un indice m tale che il limite inferiore dei valori di x, da m in poi, è zero „.

Per la regola A: (2) = (10) $\supset$ (14), (13) $\supset$ (14); e per la regola B: (4) $\supset$ (14).

(15) $\supset m \exists_h \exists_n$ è identica alla (7) per la regola di logica:

D. Due proposizioni particolari successive si possono commutare.

(16) $\exists_m \exists_h \exists_n$ è identica alla (8), per la stessa regola *D.*

Considero ora la permutazione degli indici h, m, n.

(17) $\supset_h \supset_m \supset_n$ è identica alla (1), per la regola *C.*

(18) $\exists_h \supset m \supset n$ significa: " esiste una quantità positiva h maggiore di ogni valore della data successione x „, cioè: " il limite superiore dei valori di x è finito „:

$$l' x (N_0) \in Q_0, \quad \text{ossia} \quad \infty \text{ non } l' x (N_0).$$

Colla regola B, (18) $\supset$ 11; colla A, (1) = (17) $\supset$ (18).

(19) $\supset_h \exists_m \supset_n$ " per ogni h e per qualche m e per ogni n vale la tesi „ e per disteso:

$$h \in Q \cdot \supset_h \cdot \exists N_0 \cap m \ni [n \in N_0 \cdot \supset_n \cdot x_{m+n} < h].$$

Questa è la definizione del limite e si scrive:

$$\lim x = 0.$$

Per la regola di logica B si ha:

$$(2) \supset (19); \quad \text{e} \quad (19) \supset (13).$$

(20) $\exists_h \exists_m \supset_n$ vale la (12) per la regola *D.*

(21) $\supset_h \supset_m \exists_n$ vale la (13) per la regola *C.*

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

(22) $\exists_h \supset_m \exists_n$ " per qualche h e per ogni m e per qualche n vale la tesi „ e per disteso:

$$\exists Q \cap h \ni \{m \in N_0 . \supset_m . \exists N_0 \cap n \ni [x_{m+n} < h]\}.$$

La proposizione $\exists N_0 \cap n \ni (x_{m+n} < h)$ significa che il limite inferiore dei valori di x da m in poi è minore di h, e quindi è finito, cioè $l_1 x (m + N_0) \in Q_0$, e poichè ciò avviene per ogni valore di m, ricordando quanto si è detto nella spiegazione della (13), risulta che la classe limite della successione x contiene qualche elemento finito, cioè la proposizione (22) significa: $\exists Q_0 \cap \mathrm{Lm}\, x$, o anche ∞ non $= \lim x$.

Per la regola *A* si ha: (13) $=$ (21) $\supset$ (22), e per la regola *B*: (22) $\supset$ (15) $=$ (7).

(23) $\supset_h \exists_m \exists_n$ significa:

$$h \in Q . \supset_h . l_1 x (N_0) < h,$$

cioè: $$l_1 x (N_0) = 0.$$

Si ha, per la regola *B*: (14) $\supset$ (23).

(24) $\exists_h \exists_m \exists_n$ vale la (8) per la regola *D*.

Così esaminammo le 24 proposizioni che contengono gli stessi elementi della definizione di limite, ma che ne differiscono per l'ordine delle proposizioni universali e particolari.

Tra queste passano numerose relazioni, che si deducono colle regole di logica *A, B, C, D*, viste a proposito delle proposizioni (2), (3), (9) e (15).

Tra le proposizioni considerate, oltre la definizione di limite, sono notevoli quelle che contengono fine, la classe Fine, e la classe Limite.

Si è visto, per la regola *C*, che due affermazioni universali successive si possono commutare e ridurre anche ad una sola, avendo il segno $\supset$ gli indici delle due affermazioni. Lo stesso avviene di due affermazioni particolari successive, per la regola *D*. Ma una affermazione universale non si può commutare colla particolare; sussiste solo la regola *B*.

Digitized by Google

Dirò "grado logico„ di una proposizione contenente più segni $\supset$, $\exists$ il numero minimo di questi segni, cioè il numero delle successioni dei segni $\supset$, $\exists$.

In matematica vi sono poche proposizioni di grado zero:

$$2 + 3 = 5.$$

La maggior parte delle proposizioni è di grado uno, e contiene un solo segno $\supset$.

La definizione del limite di una funzione è la proposizione (19), di terzo grado logico. La definizione del limite inferiore (l_1) data dalla (23) è di secondo grado logico.

Notizie storiche.

EUCLIDE, libro V, definizione 4, liberamente tradotto, dice: "Se a e b sono grandezze omogenee, e $a < b$, esiste un numero naturale m, tale che $ma > b$„; in simboli:

$$a,\ b \in \mathrm{Q}\ .\ a < b\ .\supset.\ \exists\, \mathrm{N} \frown m \ni (ma > b),$$

proposizione di secondo grado logico; basandosi su questo principio, Euclide dimostra proposizioni relative all'area del circolo, a volumi, ecc. In sostanza si usa il principio: l'area del cerchio è il limite superiore dei poligoni inscritti, ed il limite inferiore dei poligoni circoscritti.

ARCHIMEDE, *Della sfera e del cilindro,* libro I, postulato 5, riporta la proposizione precedente, ora nota col nome di "postulato di Archimede„, e la ripete nella prefazione al libro "delle linee spirali„; e se ne serve per trovare l'area del cilindro, del cono, della sfera, ecc.

La definizione di derivata esige il limite (lim) di una funzione. Questa idea è chiara in Newton, Leibniz, Eulero, e matematici di quel tempo; tutte le formule erano esatte, ma la loro definizione spesso si riduceva a sinonimi: quantità infinitesime, evanescenti, ecc.

NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* liber primus, scholium, parlando del rapporto di quantità evanescenti, dice:

Digitized by Google

" Objectio est quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quae, antequam evanuerunt, non est ultima; ubi evanuerunt, nulla est „.

Versione libera: " Alla definizione di tangente ad una curva, come congiungente due punti coincidenti, si può fare l'obbiezione: prima che i due punti coincidano, quella retta non è ancora tangente; e quando i due punti coincidono, quella retta non c'è più „.

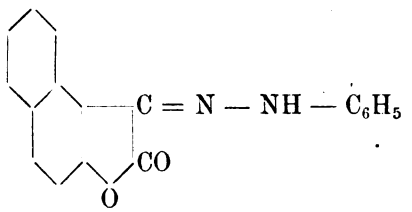
Secondo il citato articolo del prof. Peano, la prima enunciazione della definizione di limite colle tre variabili apparenti, universale-particolare-universale, rimonta a circa il 1870. Ivi si trovano riportate molte altre definizioni precedenti e seguenti.

Digitized by Google

Influenza dei sostituenti sulla stabilità di alcuni composti ciclici.

Nota di MICHELE GIUA e GIOVANNI RACCIU
presentata dal Socio nazion. residente Felice Garelli.

Il 4, 5—benzocumarandione, ottenuto per la prima volta da uno di noi (1) e in seguito studiato da Staudinger (2), Fries (3), Stollé (4) e Saftien (5), a causa del suo carattere di lattone dell'acido 2-ossi-1-naftilgliossilico, si presta assai bene per lo studio della stabilità o meno del nucleo cumarandionico rispetto ad alcuni sostituenti. Giua e De Francisci hanno trovato che il 4, 5-benzocumarandione, per azione della fenilidrazina, forma dapprima un monofenilidrazone al quale si deve attribuire la seguente costituzione:

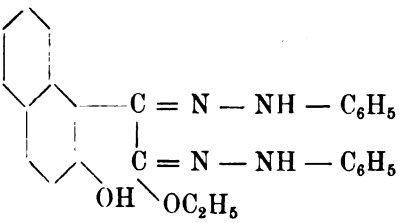


Tale formola viene confermata dalla identità del monofenilidrazone cennato, ottenuto per azione diretta della fenilidra-

(1) Giua, " Gazz. chim. ital. „, 47, I (1927); Giua e De Francisci, *54*, 510 (1924).
(2) " Helv. Chim. Acta „, *4*, 394 (1921).
(3) " Ber. chem. Gesell. „, *54*, 715 (1921).
(4) " Ber. chem. Gesell. „, *54*, 1213 (1921).
(5) " Ber. chem. Gesell. „, *58*, 1958 (1925).

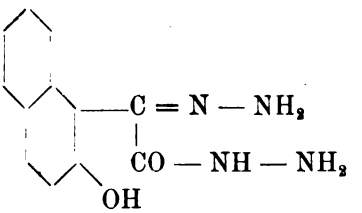
Digitized by Google

zina sul 4, 5-benzocumarandione, col composto preparato per altra via da M. Passerini (6). Con un eccesso di fenilidrazina si ha l'apertura dell'anello pentagonale e dalla soluzione alcoolica si ottiene un composto i cui dati analitici coincidono con la formula seguente:



In questa Nota si prende in esame il comportamento dello stesso benzocumarandione verso l'idrazina. Per azione di un eccesso di idrazina sulla soluzione alcoolica del benzocumarandione si ottiene l'idrazone-idrazide dell'acido 2-ossi-1-naftilgliossilico, della formula:

(I)

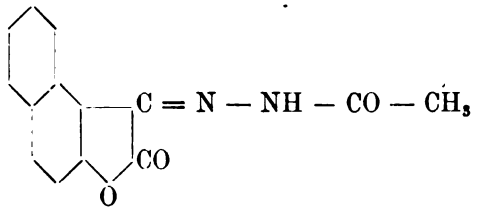


Trattando il benzocumarandione con una molecola di idrato di idrazina non si riesce ad ottenere il 3-monoidrazone allo stato puro, per quanto si abbia indizio della formazione di un prodotto di condensazione. Allo stato di acetilderivato si ottiene invece facilmente dal composto precedente per azione dell'anidride acetica che insieme alla reazione acetilante verso l'aggruppamento idrazinico in posizione 3 elimina il residuo idrazidico e ciclizza in seguito a derivato del cumarandione. I dati analitici per il prodotto che si forma per azione dell'anidride ace-

(6) « Gazz. chim. ital. », *54*, 189 (1924).

Digitized by Google

tica sull'idrazone-idrazide del 4,5-benzocumarandione concordano per un composto della formola:

(II) 

Questa reazione trova riscontro nel comportamento dell'anilanilide dell'acido 2-ossi-1-naftilgliossilico, chiarito recentemente dal Saftien.

Parte sperimentale.

Gr. 5 di 4, 5-benzocumarandione, cristallizzato dall'acido acetico, si disciolgono in 250 c. c. di alcool e alla soluzione così ottenuta si aggiungono gr. 6 di idrato di idrazina al 50 %. La reazione s'inizia subito con sviluppo di calore e dopo poco si nota la separazione di un'abbondante sostanza biancastra, che, raccolta e seccata all'aria, pesa gr. 3,8. Si cristallizza dall'alcool e si ottengono lamelle bianche argentee che fondono a 195-196° con decomposizione.

All'analisi:

Gr. 0,2713 di sostanza dettero gr. 0,5865 di CO_2 e gr. 0,1075 di H_2O.
Gr. 0,1546 di sostanza dettero c. c. 31,2 di N (a 22° e 750 mm.).

	Trovato	Calcolato
	C % : 58,96	59,01
per $C_{12}H_{12}O_2N_4$	H „ : 4,43	4,96
	N „ : 23,02	22,90

La sostanza, che corrisponde alla formula (I), è solubile nei comuni solventi organici, tranne l'etere di petrolio. Con acido solforico concentrato dà una intensa colorazione violetta.

Trattando gr. 1,5 di idrazone-idrazide con 15 c. c. di anidride acetica per debole riscaldamento si separa una sostanza gialla, che cristallizzata dall'acido acetico fonde a 244°.

Digitized by Google

All'analisi:

Gr. 0,1049 di sostanza dettero gr. 0,2539 di CO_2 e gr. 0,0424 di H_2O.
Gr. 0.1040 di sostanza dettero c. c. 10,4 di N (a 12° e 732 mm.).

		Trovato	Calcolato
per $C_{14}\ H_{10}\ O_2\ N_2$	C %	66,01	66,10
	H "	4,49	3,93
	N "	11,6	11,02

La sostanza è solubile nei comuni solventi organici; poco solubile in etere di petrolio; con acido solforico conc. dà una intensa colorazione rosso-vinosa.

Torino, Laboratorio di Chimica organica
della R. Scuola d'Ingegneria.

Digitized by Google

Studio mineralogico dei terreni agrari del Vercellese.

Nota del Socio nazion. resid. EMILIO REPOSSI

Dalla Stazione Sperimentale di Risicoltura di Vercelli mi furono comunicati per lo studio numerosi campioni di terreni agrari provenienti dalle varie parti del territorio vercellese, ossia della regione compresa tra le falde della zona montuosa ed i fiumi Dora Baltea, Po e Sesia.

I campioni furono prelevati alla superficie del terreno e mi furono trasmessi già preventivamente spogli dello scheletro ghiaioso e sabbioso grossolano e dei frustoli vegetali più visibili.

Scopo precipuo del lavoro la determinazione mineralogica dei componenti sabbiosi del terreno, sia in riguardo alla loro natura, sia in riguardo al loro stato di conservazione, ch'è strettamente legato ad alcuni dei caratteri praticamente più importanti del terreno agrario.

Data l'indole del lavoro ed i suoi scopi essenzialmente applicativi, per i quali la determinazione della maggior parte dei componenti rari od eccezionali del terreno non ha importanza apprezzabile, le ricerche si poterono mantenere entro un àmbito relativamente modesto, lontane dalle minuziosità richieste da uno studio completo dei singoli materiali alluvionali, e poterono quindi procedere con una certa speditezza.

Di ciascun campione, sopra una quantità determinata (10-20 gr.), fu operata innanzitutto una prudente levigazione per allontanarne la parte colloidale argillosa e tutto il pulviscolo cristallino che per la sua estrema finezza non si presta ad una determinazione microscopica fatta con gli ordinari ingrandimenti. Parte dello scheletro sabbioso così ottenuto (e pesato) venne

Digitized by Google

sottoposta ad un rapido trattamento con acido cloridrico molto diluito, prima a freddo e poi a caldo, ottenendone così sia una opportuna lavatura, necessaria per le determinazioni ottiche, sia la constatazione rapida della eventuale presenza di carbonati.

Tanto il residuo non lavato come quello lavato furono quindi stacciati con una reticella metallica di 440 maglie per cm^2. La parte più grossolana fu volta per volta esaminata con una lente binoculare ($\times$ 20) per la determinazione ad occhio dei componenti più sicuramente riconoscibili, ed anche per separarne ed esaminarne con tutte le risorse della tecnica mineralogica i componenti di dubbia o difficile determinazione. La parte stacciata, formata da granuli di dimensioni opportune per la diretta determinazione al microscopio, fu invece divisa ulteriormente in due porzioni mediante bromoformio ($d = 2,9$), ottenendo così da una parte la concentrazione di tutti i minerali leggeri (quarzo, calcedonio, felspati, calcite, dolomite, ecc.) e dall'altra i così detti minerali pesanti. Quest'ultima separazione, preferita agli ordinari metodi di concentrazione dei minerali pesanti perchè più delicata e perfetta, rende non solo più rapida la determinazione dei singoli componenti, ma permette anche un più esatto apprezzamento della loro frequenza e, dato lo scopo del lavoro, è completamente sufficiente. In nessun caso infatti si dovette ricorrere ad ulteriori separazioni gravimetriche per la sicura determinazione dei vari minerali, bastando sempre la diagnosi microscopica fatta, per ciascuna porzione, sopra un non grande numero di preparati (quattro o cinque, rispondenti a 2000-2500 granuli all'incirca).

Le indagini sui terreni del Vercellese, così condotte, non hanno la pretesa di essere, sotto il riguardo strettamente scientifico, completamente esaurienti. Non è impossibile, sebbene poco probabile, che qualcuno dei componenti rari delle sabbie sia sfuggito al controllo, e occorre notare che il prelevamento dei campioni, fatto in superficie e con indirizzo agrario piuttosto che geologico, può essere in qualche caso inadatto a darci un'idea completa della composizione dei vari lembi alluvionali; ma, pur tuttavia, parmi che la somma di lavoro compiuta rappresenti un non trascurabile contributo allo studio mineralogico dei ter-

Digitized by Google

reni. al quale ora si dà un'importanza non molto inferiore a quella dello studio chimico, fisico e organico dei terreni stessi.

I campioni di terreni agrari studiati, provenienti da località distribuite regolarmente nel territorio vercellese di pianura, rappresentano cronologicamente tutti i terreni del quaternario, ossia l'olocene recente (alluvium) e antico (diluvium superiore) e il plistocene (diluvium medio e inferiore), non escluso il morenico o almeno il terreno di rimaneggiamento morenico.

La provenienza delle alluvioni si può già a priori ritenere quadruplice: esistono cioè nel Vercellese alluvioni padane, alluvioni sesiane, alluvioni biellesi e alluvioni aostane; le quali naturalmente si posson trovare in qualche caso, diremo così, allo stato puro e in casi più frequenti variamente mescolate. Quest'ultima condizione si verifica soprattutto nelle alluvioni che abbiam chiamate padane, le quali nel territorio vercellese sono in realtà costituite in parte da materiali di provenienza aostana e in parte da materiali di provenienza più occidentale. Mescolanze si hanno pure tra le alluvioni aostane e quelle biellesi, dovute in parte anche al rimaneggiamento che i torrenti biellesi più occidentali hanno fatto delle morene dell'anfiteatro d'Ivrea. Anche per questa ragione i materiali di provenienza aostana sono molto largamente diffusi nel territorio vercellese.

Le alluvioni sesiane pure sono limitate ad una non larga striscia di alluvium che costeggia la Sesia prima della sua confluenza col Cervo e con l'Elvo. Dopo di questa confluenza abbiamo alluvioni miste sesiane-biellesi e più in basso forte mescolanze anche con alluvioni della Dora, le quali ultime invero sembrano largamente estese su tutta la parte meridionale del territorio vercellese: ciò che è d'accordo col declivio generale di questa porzione di piano diluviale e con l'andamento di tutti i rivi che la percorrono, orientati da nord-ovest a sud-est.

Ma se questa è la distribuzione generale delle alluvioni, posson darsi casi, e si danno in realtà, in cui la provenienza del materiale non è prevedibile o non è spiegabile con le considerazioni alle quali abbiamo accennato. L'esame mineralogico dello scheletro sabbioso di un terreno, confrontato con la natura petrografica delle rocce dei vari bacini fluviali, tenendo conto

Digitized by Google

soprattutto delle rocce eventualmente sviluppate in un solo bacino, può fornirci un documento sicuro di provenienza. Parve però ad ogni modo prudente ed opportuno confortare le deduzioni ricavabili da questo confronto, studiando le alluvioni attuali dei corsi d'acqua principali che bagnano o attraversano il territorio vercellese, ed a questo scopo furono per ciascuno di essi prelevati e studiati appositi campioni di sabbia viva.

È poi da notarsi che l'analisi mineralogica delle sabbie attuali ci offre un altro termine di confronto necessario. Non dobbiamo infatti dimenticare che per lo studio del suolo agrario interessa non solo la composizione mineralogica attuale dello scheletro sabbioso, ma anche la composizione primitiva. Occorre cioè stabilire, fin dove sia possibile, quali siano i minerali che sono parzialmente o interamente scomparsi dal terreno dal momento in cui l'alluvione si è formata sino ad oggi. Questa constatazione si può fare anche tenendo conto semplicemente del fatto che le sabbie vercellesi sono tutte costituite dagli stessi minerali essenziali, ossia sono qualitativamente pressapoco eguali, almeno nella maggioranza dei casi, e differiscono solo per le quantità relative dei diversi costituenti o per la presenza di qualche minerale subordinato. Ma è evidente che lo studio della composizione attuale delle alluvioni ci permette in ogni caso di metterci su una base più sicura e più completa.

E questo confronto è tanto più opportuno, a proposito dei terreni del Vercellese, in quanto questi appartengono, come s'è detto, a tutti i diversi livelli del quaternario; attraverso i quali è stato in qualche caso possibile accompagnare gradualmente ne' suoi vari stadi l'alterazione dei minerali del terreno.

Un lavoro consimile, con ben diversa competenza, si proponeva di fare il compianto prof. Artini sopra i terreni agrari del Milanese, e lo aveva iniziato con un suo studio sulla brughiera lombarda, inserito nel volume *Le Brughiere* (1). In questo studio l'Artini ha preso in esame tre campioni di terreno del diluvium

(1) Pubblicato nel 1927 in onore del prof. Angelo Menozzi in occasione del 50° anniversario della sua laurea.

Digitized by Google

superiore, due del diluvium medio e due del diluvium inferiore, provenienti da vari punti del Gallaratese e del territorio a nord di Monza. I risultati ai quali Egli è giunto con quella straordinaria acutezza d'indagine che gli era propria trovano una perfetta corrispondenza con quelli che risultano dalle mie ricerche: ciò che, se da un lato conforta il mio studio, dall'altro prova che le osservazioni dell'Artini hanno invero una portata generale e vanno prese per base per ogni studio del genere.

Quali siano le vicende attraverso le quali passano i componenti minerali del terreno appare chiaro quando si confronta con la composizione delle alluvioni fresche la composizione delle alluvioni del quaternario antico, rappresentate nel Vercellese dai terreni delle *baragge* tipiche (n. 3, 4, 5). In queste, in modo perfettamente analogo a quello notato dall'Artini per il terreno di *groana*, la sostanza calcarea è interamente scomparsa, i feldspati sono tutti profondamente alterati e trasformati in argilla, la idratazione e l'ossidazione di tutto quanto è ossidabile e idratabile sono complete.

Il processo di alterazione si concreta in una profonda idrolisi, in ambiente ossidante, con intenso dilavamento dei prodotti solubili costituiti dai composti dei metalli alcalini e alcalino-terrosi (1).

Come è noto, questo processo viene ormai convenzionalmente indicato col nome di *ferrettizzazione*. Esso risulta infatti caratterizzato dalla trasformazione in ferrici di tutti i composti ferrosi e dalla integrale conservazione, insieme con l'allumina, del ferro, che si osserva spesso concentrato in forma di noduli limonitici duri entro il terreno ferrettizzato e che dà a questo un'intensa e tipica tinta ocracea.

Nei terreni appartenenti ai vari livelli del quaternario questo quadro di alterazione va gradualmente disegnandosi, e noi, studiando lo scheletro sabbioso di ciascuno di essi, assistiamo, si può dire, alle vicende dei vari componenti minerali del terreno; qualcuno dei quali appare sotto questo riguardo particolarmente significativo.

---

(1) E. Artini, op. cit., pag. 11.

Digitized by Google

I minerali sui quali l'Artini richiama in modo speciale l'attenzione per i terreni del Milanese sono i *feldspati*, gli *anfiboli*, i *granati*, la *biotite*, i *carbonati* e l'*apatite*.

Dei *feldspati* nota innanzitutto la alterabilità molto maggiore nei termini poveri di silice che nei termini ricchi; tanto che i plagioclasi basici sono alteratissimi o addirittura scomparsi anche nei terreni relativamente recenti. L'*ortoclasio* e sopra tutto il *microclino* hanno una resistenza molto maggiore.

Queste osservazioni appaiono perfettamente confermate dall'esame dei terreni del Vercellese, in cui la riduzione progressiva dell'elemento feldspatico, del resto logica e prevedibile, parmi netto e regolare. Nei terreni di ciascun tipo d'alluvione i *plagioclasi sodico-calcici* sono sempre notevolmente più scarsi dell'*ortoclasio* ed in qualche caso scompaiono del tutto, mentre permane ancora una percentuale discreta di quest'ultimo. Il *microclino*, come già altra volta osservai (1), nelle alluvioni del Vercellese è un elemento importante solo per quelle di provenienza sesiana, tanto da costituire con la sua frequenza uno dei caratteri distintivi delle sabbie della Sesia in confronto con tutte le altre, che lo contengono solo in percentuali nettamente inferiori. Ora m'è parso di notare che la riduzione del microclino avvenga con una rapidità assai minore di quella degli altri feldspati. E non posso esprimermi in modo più reciso unicamente perchè nel Vercellese alluvioni sicuramente sesiane molto antiche non ne esistono e il confronto dovette esser limitato a quello fra le sabbie attuali e le alluvioni del diluvium medio.

Nelle alluvioni sesiane e in quelle che scendono dalle colline porfiriche tra Cossato e Gattinara entra come componente abbastanza abbondante la pasta felsitica rosea. Anche per questa valgono le osservazioni fatte sui feldspati acidi.

L'Artini, nel lavoro citato come in altri antecedenti, e già prima di Lui il Salmojraghi hanno insistito a lungo sul comportamento dell'orneblenda, in cui, oltre alla progressiva riduzione,

---

(1) E. Repossi, *Osservazioni mineralogiche sopra alcune sabbie del sottosuolo della pianura presso Novara* (" Atti Accad. delle Scienze di Torino ,, vol. LXIII, 1928).

Digitized by Google

si possono osservare caratteristiche forme di alterazione rappresentate, come è noto, dalle cuspidi di corrosione che si disegnano alle estremità dei cristalli e sui margini delle crepe entro le quali s'insinua l'alterazione.

La progressiva riduzione nella percentuale dell'orneblenda come di tutti gli altri anfiboli verde chiaro o incolori (tremolite) si osserva abbastanza nettamente anche nelle varie alluvioni del Vercellese e non di rado si hanno anche esempi di forme cuspidate (alluvioni del Cervo e Biellesi in genere); ma sopra tutto mi parve di rilevare la frequenza di vere forme di succhiatura degli anfiboli, i quali specie in certi terreni si presentano solitamente in esili individui coi margini e le estremità arrotondati, mentre nelle sabbie attuali sono sempre in forma di schegge a spigoli vivi.

In tutte le alluvioni studiate, ma in particolar modo in quelle sesiane e biellesi, è componente abbastanza frequente e caratteristico l'*orneblenda bruna*. Anch'essa subisce la sorte degli altri anfiboli.

Il *glaucofane* invece, la cui frequenza è in certo modo reciproca di quella degli anfiboli bruni, ossia aumenta notevolmente dalle alluvioni sesiane a quelle della Dora Baltea, di cui è in tutte le sue forme un componente di abbondanza veramente caratteristica, mi sembra notevolmente più resistente degli altri anfiboli. Non vi si notano infatti con sicurezza nè la riduzione di quantità nelle alluvioni antiche nè le forme di corrosione così caratteristiche degli anfiboli verdi.

Il *granato*, come nota l'Artini, si comporta in modo perfettamente analogo a quello degli anfiboli verdi. La riduzione progressiva della sua quantità si rileva non meno agevolmente, poichè nella generalità delle alluvioni vercellesi è un componente altrettanto abbondante e non di rado parmi persino più abbondante della stessa orneblenda. La corrosione degli individui di granato è spesso caratteristica: questi son talvolta ridotti a veri scheletri di cristalli, e pur non di rado vi si nota la faccettatura rilevata in essi dall'Artini.

La *biotite* in tutte le alluvioni del Vercellese è un componente relativamente molto scarso: ciò che del resto è in perfetto

Digitized by Google

accordo con la natura petrografica dei bacini da cui provengono le alluvioni stesse, scavati in buon parte nella zona dei gneiss-Sesia eminentemente muscovitici. La trasformazione in " mica dorata „ è la regola in tutte le alluvioni non attuali.

L'Artini nota la scomparsa assoluta dell'*apatite* e dei carbonati nei terreni del diluvium antico.

Per quanto riguarda l'*apatite* noto che si tratta di un componente sicuramente presente nelle alluvioni fresche, ma sempre in quantità molto scarsa : tanto che la sua constatazione richiede di solito l'esame accurato di diversi preparati. Non ho trovato mai l'apatite nei terreni di baraggia e neppure nei terreni del diluvium medio e superiore : ma, dato l'indirizzo del presente lavoro, non posso dare a questa constatazione negativa un grande valore.

La scomparsa dei carbonati nei terreni del diluvium antico è assoluta. Per i terreni più recenti, in cui, data la provenienza delle alluvioni vercellesi, la calcite originaria è solo eccezionalmente presente in quantità apprezzabile, si trova invece con qualche maggiore frequenza la *dolomite*. Ciò ch'è confermato dal fatto che spesso col trattamento con acido cloridrico diluito l'effervescenza si ottiene solo a caldo.

Nelle alluvioni del Milanese studiate dal Salmojraghi e dall'Artini i pirosseni, sia rombici che monoclini, sono componenti scarsissimi o addirittura eccezionali. Di guisa che questi Autori non fanno nessuna osservazione sul loro grado di alterabilità.

Nelle alluvioni del Vercellese invece, e specialmente nelle alluvioni biellesi e sesiane, i cui bacini d'origine sono ampiamente intagliati nelle rocce gabbro-dioritiche della " zona d'Ivrea„, i pirosseni sono spesso quasi altrettanto abbondanti come gli anfiboli. Predominano nelle alluvioni i *pirosseni rombici*, tanto facilmente riconoscibili pel loro pleocroismo rosso-verde (ipersteno-enstatite), ma non mancano neanche i monoclini.

A me parve di osservare che i pirosseni subiscano vicende non diverse da quelle degli anfiboli verdi, sia in riguardo alla riduzione di quantità nelle alluvioni antiche sia in riguardo alle forme di corrosione. In un campione prelevato a Buronzo (diluvium sup.), relativamente molto ricco di orneblenda bruna e di

Digitized by Google

pirosseni rombici, si osservano frequenti granuli di iperstene nettamente cuspidati e non dissimili da quelli orneblendici.

Se questi sono i principali componenti alterabili del terreno agrario, si possono pure elencare diversi componenti i quali resistettero perfettamente alle azioni disgreganti che si manifestarono nelle alluvioni dal quaternario antico sino ad ora. Oltre al quarzo, sono da enumerarsi soprattutto i minerali del gruppo epidoto, la muscovite, i minerali del gruppo clorite-serpentino, la tormalina, lo zircone, il rutilo, la magnetite e l'ilmenite.

Pel *quarzo* non occorre spender parola. Lo stesso si potrebbe ripetere per il *calcedonio* organogeno, il quale però nei terreni del Vercellese è veramente eccezionale e limitato esclusivamente ai terreni dei dintorni di Villa del Bosco ed alle alluvioni del torr. Roasenda. che scendono da questo tratto collinesco dove si trova il noto affioramento di calcari liasici (1) carichi di spicule di spugne.

I minerali del gruppo *epidoto-zoisite* sono interessanti per la relativa abbondanza con la quale si trovano nelle alluvioni del Vercellese. Sono frequenti specialmente gli epidoti propriamente detti, ma non mancano, anzi sono talvolta altrettanto abbondanti i termini zoisite-clinozoisite, del quale ultimo minerale si trovano non di rado, anche nei terreni antichi, individui con la zona parallela ad *y* perfettamente conservata, che permette di farne una diagnosi sicura.

La quantità di questi minerali contenuta nelle alluvioni di varia età non sembra diversa, e se pur riesce difficile stabilirne un relativo aumento nelle alluvioni antiche, depauperate dei componenti alterabili, è però certo che non c'è una diminuzione paragonabile a quella degli anfiboli e, tanto meno, a quella dei feldspati.

La stessa affermazione si può ripetere per la *muscovite*, la quale è pure generalmente abbastanza abbondante nelle alluvioni

---

(1) S. Franchi, *Le pietre da Coti di Villa del Bosco nel Biellese* (" Rassegna Miner. „, vol. XXI, n. 3, Torino, 1904).

Digitized by Google

del Vercellese, e per le *cloriti*, per le quali anzi mi parve di notare un aumento di percentuale nelle alluvioni antiche.

La *tormalina*, lo *zircone* e il *rutilo* si trovano in individui perfettamente intatti anche nelle alluvioni più ferrettizzate. E parmi che le cose non vadano diversamente neppure per la *magnetite* e l'*ilmenite*, componenti spesso altrettanto e più abbondanti dei tre citati. In non rari casi si osservano ottaedrini perfetti di magnetite anche nei terreni più antichi.

Tutti questi componenti inalterabili, ed altri meno frequenti o addirittura eccezionali, non hanno che un'importanza assolutamente indiretta nello studio delle modificazioni dello scheletro sabbioso nei terreni agrari. Ragione per la quale, stabilita la composizione che potrebbe dirsi normale di ciascuna alluvione, si sono, nel presente studio, osservati particolarmente i primi. Nella tabella che riassume nel consueto modo i risultati delle varie determinazioni hanno quindi valore specialmente i numeri riferiti ai minerali alterabili.

Fatte le debite limitazioni e tutte le riserve del caso, il grado di alterazione di un'alluvione può essere rappresentato con larga approssimazione dalla percentuale di argilla che è contenuta nel terreno agrario. Se non si può certo affermare che tutta l'argilla contenuta nel terreno si sia formata in posto, è però sicuro che la parte di essa alla quale si può attribuire questa origine secondaria è sempre cospicua. Sarebbe quindi molto interessante il poter determinare con precisione l'argilla colloidale del terreno. Ma sfortunatamente, come ognuno sa, questa determinazione è in ogni caso molto imprecisa, riuscendo fra l'altro difficilissimo separare con sicurezza l'argilla colloidale dallo scheletro sabbioso finissimo, avente un grado di dispersità non molto minore di quello dei colloidi propriamente detti.

Dato questo fatto e dato anche lo scopo del presente lavoro, si è creduto opportuno limitare la determinazione alla percentuale approssimata dello scheletro grossolano, ottenuto, come s'è detto, mediante prudente levigazione di una quantità determinata del terreno secco, preso sempre nelle medesime condizioni. I campioni trasmessimi per lo studio erano già stati preventivamente seccati per semplice esposizione all'aria e stacciati

Digitized by Google

in modo che nessun granulo minerale conservato superasse un millimetro e mezzo all'incirca di diametro.

All'atto pratico questa determinazione, pur tanto grossolana, diede risultati abbastanza soddisfacenti, soprattutto pel fatto che la riduzione della percentuale dello scheletro sabbioso macroscopico nei terreni di mano in mano più antichi si verifica in misura molto considerevole e che appaiono quindi netti i distacchi da un terreno all'altro. Sono in seguito riportati i risultati per ciascun terreno. Basti ora notare che, mentre nei terreni dell'alluvium e del diluvium superiore lo scheletro sabbioso, determinato nel modo indicato, diede percentuali oscillanti fra il 35 e il 45 per cento, giungendo qualche volta a superare anche il 50 %, nei terreni di baraggia tale percentuale discese sino al 10 %.

Senza dunque voler dare a questa determinazione un valore che non può in nessun modo avere, perchè troppe sono le cause primarie e secondarie che possono influire sulla percentuale delle varie parti, classificate in ordine di grandezza, che costituiscono mineralogicamente un terreno, l'esperienza fatta sui terreni del Vercellese dimostrerebbe ch'essa può dare, caso per caso, un indizio apprezzabile sull'antichità di un'alluvione.

La medesima osservazione si potrebbe fare sul componente ocraceo del terreno, di cui del resto si tien già conto quando, nel riconoscimento ad occhio di un terreno, si parla di grado più o meno avanzato di ferrettizzazione.

***

Nella tabella posta in fine al presente lavoro sono esposti nel consueto modo i risultati dell'esame mineralogico sia delle sabbie vive sia dello scheletro sabbioso dei vari terreni. Non è forse inutile però riassumere prima brevemente i caratteri che mi sembrano più salienti di ciascuna alluvione e di ciascun gruppo di terreni.

Sabbia della Sesia (A).

Il campione esaminato appare alquanto eccezionale, perchè molto ricco di elementi pesanti: i componenti che affondano in

Digitized by Google

bromoformio ($d = 2.9$) rappresentano all'incirca il 50 % in volume della sabbia.

Già in altro lavoro ho messo in evidenza i caratteri che mi sembrano salienti delle sabbie di origine sesiana e che servono a distinguerle da quelle biellesi (1). Lo studio attuale conferma pienamente i risultati allora conseguiti. La sabbia sesiana studiata è innanzitutto distinta dall'abbondanza relativamente grande di tre componenti: il *microclino*, il *pirosseno rombico* e l'*orneblenda bruna*; ai quali si potrebbe aggiungere anche la *sillimanite*. In qualunque preparato compare ordinariamente, già nel primo campo esaminato, il microclino tra gli elementi leggeri e gli altri due fra i minerali pesanti.

Nel campione esaminato appare abbondante anche il *granato*, ma questa sua relativa abbondanza è forse dovuta al carattere alquanto eccezionale del campione stesso, in cui gli elementi pesanti sono certo concentrati in misura superiore al normale.

Come caratteri negativi, e sempre limitandoci ai minerali di maggiore e più costante diffusione, credo di poter citare la relativa scarsità degli *anfiboli verdi*, del *glaucofane* e dell'*epidoto*.

Sabbia del Roasenda (B).

Le caratteristiche di questa sabbia stanno essenzialmente nell'abbondanza dei componenti che derivano dallo sfacelo dei porfidi, formanti quasi per intero il bacino d'alimentazione del Roasenda. Il colore stesso della sabbia, marcatamente rossastro, ne è indice.

Il componente predominante, in quantità superiore anche al quarzo, è la *pasta felsitica* rosea. Compare in una certa misura anche la *sericite* giallo-verdognola.

Relativamente scarso, in confronto a quanto ci si potrebbe aspettare, il *calcedonio* organogeno (spicule di spugne), ch'è invece abbondantissimo nei terreni di Villa del Bosco.

Gli altri componenti fanno pensare che le sabbie attuali del Roasenda derivino in parte dal rimaneggiamento del diluvium

(1) Nota citata.

Digitized by Google

antico, in cui è probabile ci sia stata una notevole mescolanza tra i materiali locali e i materiali sesiani e biellesi.

Sabbia del Cervo (C).

La sabbia del Cervo ha un colore grigio-rossastro. Essa parmi caratterizzata da una notevole abbondanza degli *elementi feldspatici*, che sono tutti rappresentati, *microclino* compreso, e dal predominio assoluto degli *anfiboli verdi* su tutti gli altri. Non mancano gli *anfiboli azzurri* e neppure quelli bruni, ma sono molto scarsi.

Relativamente abbondanti lo *zircone*, la *titanite* e l'*apatite*, che sono, specialmente questi ultimi, ordinariamente molto scarsi nelle sabbie del Vercellese.

Gli *epidoti* sono scarsi, ma contano una quantità notevole di *zoisite-clinozoisite*; pure scarsi i *pirosseni*.

Sabbia dell'Elvo (D).

Non ho potuto avere in esame un campione di sabbia viva dell'Elvo, ma credo pur tuttavia di potere indicare i caratteri generali ricavandoli dall'esame di un campione di alluvioni recenti preso sopra Quinto Vercellese.

I caratteri salienti delle sabbie dell'Elvo sono dati, per quanto riguarda gli elementi leggeri, dalla mancanza o dalla grande scarsità del *microclino*, mentre gli altri feldspati sono abbastanza abbondanti e tutti rappresentati.

I *pirosseni* sono tutti assai scarsi, mentre gli *anfiboli verdi* e quelli chiari, presenti in buona misura, prevalgono nettamente sugli *anfiboli azzurri*. L'*orneblenda bruna* tipica sembra mancare, mentre si trova qualche anfibolo verde-bruno.

La *mica* è quasi tutta *muscovite* e non molto abbondante, almeno nel campione esaminato.

Sabbia della Dora Baltea (E).

La sabbia della Dora ha una tinta grigia, fredda, più chiara nell'insieme e ben distinta da quella delle sabbie precedenti.

Le sue caratteristiche più salienti si possono così riassumere: l'elemento feldspatico è prevalentemente *ortoclasio*, mentre

Digitized by Google

il *microclino* è scarsissimo; la *mica* è assai abbondante (almeno nel campione esaminato, preso presso Saluggia) e quasi interamente *muscovite*; *epidoto-zoisite, anfiboli verdi* e *glaucofane* pure abbondanti, mentre diventano rari o rarissimi gli *anfiboli bruni* ed i *pirosseni* in genere, tra i quali non si notano più gli *iper-steni* intensamente pleocroici, frequenti ad esempio nelle sabbie sesiane. Compaiono in certa misura i *carbonati*.

Fra tutti questi caratteri uno dei più facilmente constatabili è l'abbondanza di glaucofane, per il quale la sabbia della Dora sembra emergere su tutte le altre del Vercellese.

Come altri caratteri singolari, si può citare la non rara presenza dei *granati gialli* e di *cloritoide*, e l'assenza completa o quasi completa delle *sillimanite*.

Sabbia del Po (F).

Il campione studiato fu prelevato a Crescentino, alla confluenza del Po con la Dora. La sabbia ha un colore grigio freddo non molto dissimile da quello delle sabbie della Dora, che del resto sono qui naturalmente mescolate in larga misura con le sabbie di provenienza occidentale.

Anche in questo campione appare come carattere più spiccato l'abbondanza di *muscovite* e di *anfiboli verdi* e *azzurri*. Il *glaucofane*, almeno nel campione studiato, sembra però meno abbondante che nelle sabbie della Dora, con un netto distacco. Sembrano invece alquanto più abbondanti i *carbonati romboedrici*. Scarsissimi ancora il *microclino*, i *pirosseni rombici*, la *biotite* e gli *anfiboli bruni*. Un po' più frequenti i *pirosseni monoclini* e la *tormalina*. Per gli altri componenti non ci sono differenze apprezzabili con sicurezza con una ricerca relativamente sommaria, quale è quella fatta nel presente studio, che si propone appunto di rilevare solo le più spiccate caratteristiche di ogni alluvione.

Terreno di Villa del Bosco e di Roasio (1 e 2).

Questi due terreni si staccano nettamente dagli altri che descriveremo in seguito. Si tratta infatti di terreni collineschi (il secondo proviene da un vigneto), vicini per di più agli affio-

Digitized by Google

ramenti triasici e liasici di questa plaga. Caratteristica più spiccata di essi la presenza, in percentuale abbastanza forte, specie nel primo, di *carbonati* e di *calcedonio* organogeno, e, naturalmente, di elementi dei porfidi.

I carbonati sono in parte *calcite* e in parte forse anche maggiore *dolomite*.

Il *calcedonio organogeno* sembra essere esclusivamente rappresentato da spicule di spugne, i cui frammenti in forma di cilindretti cavi hanno il loro piccolo tubicino riempito di ocra.

Fra gli elementi dei porfidi predomina la *pasta felsitica* rosea. È pure presente il *quarzo* caratteristico di queste rocce, talvolta in cristallini perfetti. Manca invece l'*ortoclasio* abbastanza fresco, e così pure mancano l'elemento plagioclasico e il microclino ancora ben riconoscibili.

Scarsissimi gli elementi anfibolici e pirossenici, come pure il granato.

Tra le miche abbonda specialmente la *biotite* alterata (la così detta " mica dorata „) e non manca la *sericite*.

Tanto l'uno quanto l'altro terreno sono assai ricchi di parte argillosa e minuta, che viene scacciata con la levigazione, e di grumi limonitici, i quali dànno al terreno una forte tinta ocracea. Il residuo, lavato con acido cloridrico, ha un caratteristico colore roseo.

Terreni di baraggia (Buronzo-Masserano) (3-4-5).

I terreni qui citati, appartenenti tutti al diluvium inferiore, provengono da tre diversi punti della baraggia tra Masserano e Buronzo; uno, presso Masserano (3), risponde alla parte più alta della baraggia, perfettamente incolta; un secondo, più presso Buronzo (4), risponde ancora alla baraggia sterile; il terzo risponde invece alla parte più bassa della baraggia, coltivata a risaia (5).

Il terreno n. 3, fino e di color giallo-bruniccio chiaro a secco, trattato nel modo sopra descritto, lascia un residuo sabbioso che sale solo al 17 %.

Il residuo, lavato con acido cloridrico diluito, perde una quantità notevole di limonite senza fare effervescenza nè a freddo nè a caldo.

Digitized by Google

Nel residuo è già ad occhio rilevabile una fortissima percentuale di quarzo; gli elementi feldspatici e i componenti colorati sono scarsissimi.

L'esame microscopico della parte stacciata conferma che il terreno non contiene quasi più feldspati sani e pochissimi sono anche i feldspati torbidi e alterati e la stessa pasta felsitica.

Scarsissimi sono gli elementi pesanti (non più del 2-3 %).

Il terreno n. 4 è anche più profondamente decomposto che non il n. 3. Il colore del campione secco è giallo-ocraceo. Il residuo sabbioso giunge appena al 10 %. Con acido cloridrico non si ha traccia di effervescenza nè a freddo nè a caldo e il residuo perde una quantità notevole di limonite.

Nella parte stacciata gli elementi leggeri, che formano il 90-95 % del residuo, sono rappresentati quasi solamente da quarzo, essendo scarso l'ortoclasio torbido e ancor più scarso il plagioclasio. alteratissimo. La pasta felsitica sembra essa pure fortemente alterata.

Gli elementi pesanti nulla presentano di particolarmente notevole oltre la generale scarsità. I granati sono tutti molto corrosi e così gli anfiboli verdi.

Abbondanti i grumi di limonite.

Il terreno n. 5 può dirsi ancora di baraggia, sebbene appartenga alla lingua inferiore, già trasformata in risaia, dell'alluvione diluviale antica. Il colore del campione secco è bruniccio per una forte percentuale di sostanza organica. Levigato, il campione perde una grande quantità di argilla ocracea fina, lasciando un residuo non superiore al 16 %, composto in prevalenza da quarzo, ma in cui non sono così scarsi come nei precedenti gli elementi pesanti.

All'esame microscopico si constata che i feldspati, e specialmente i plagioclasi, sono anche qui scarsi assai e alterati. I pirosseni sono quasi scomparsi; gli anfiboli ed i granati molto corrosi.

Terreni di Lenta e Arborio (6-7).

I campioni qui indicati provengono dal diluvium recente della sponda destra della Sesia. È opportuno confrontare la loro composizione con quella delle sabbie attuali della Sesia (A).

Digitized by Google

Il terreno secco ha color bruno abbastanza intenso per la percentuale di sostanza organica ch'esso contiene. Trattato nel solito modo lascia un residuo del 28 %. Non fa effervescenza nè a freddo nè a caldo con acido cloridrico.

Il residuo sabbioso grossolano appare ricco di elementi pesanti. Fra i minerali leggeri caratteristica la presenza del *microclino*, la scarsità relativa del *quarzo* e dei *feldspati*. Fra i minerali pesanti caratteristica l'abbondanza della " mica dorata „, dei *pirosseni rombici*, e dell'*orneblenda basaltica* e del *granato*, spesso abbastanza fresco, e la scarsità di *glaucofane*. Caratteri tutti ben d'accordo con la provenienza sesiana dell'alluvione.

Il campione n. 7, preso a nord di Arborio, presenta gli stessi caratteri generali, ma appare alquanto più povero di elementi pesanti. Il residuo sabbioso grossolano sale al 34 %. Non fa effervescenza nè a freddo nè a caldo con acido cloridrico, ma perde una quantità notevole di limonite.

Caratteristica anche qui la presenza del *microclino*, dei *pirosseni rombici* e dell'*orneblenda bruna* e la scarsità del *glaucofane*.

Terreno alluvionale recente di Roasenda (8).

Il campione fu prelevato nell'alluvium di Cascina S. Giacomo presso Roasenda. È opportuno confrontarlo col B e coi campioni di baraggia.

Il terreno è giallo-ocraceo, ed è difatti ricco di grumi limonitici. Lo scheletro sabbioso grossolano sale al 40 % e lavato con acido diluito prende un caratteristico colore roseo, dovuto alla presenza di *ortoclasio* rosa e di *pasta felsitica* in misura considerevole.

Caratteristica la presenza, oltre che di questi elementi, del *calcedonio* organogeno, invero assai scarso, di *orneblenda bruna* e di *pirosseni*, e la scarsità del *glaucofone*. La *sericite* è presente, ma in tenuissima proporzione.

Terreno alluvionale di Buronzo (9).

Il campione, prelevato a sud di Buronzo, proviene dall'alluvium del Cervo: è quindi da confrontarsi col campione C e coi terreni di baraggia.

Digitized by Google

Il terreno secco ha color bruno-giallognolo. Lascia un residuo sabbioso grossolano del 41 %, perdendo molto materiale fino ocraceo.

Nel residuo, che si schiarisce molto con la lavatura, appaiono abbastanza abbondanti gli elementi pesanti. Sono presenti in buona misura i *feldspati* di vario tipo, tra cui non manca il *microclino*, scarsissimo. Fra gli elementi pesanti è caratteristica l'abbondanza dell'*orneblenda bruna* e dei *pirosseni rombici*, tra i quali si notano alcuni individui d'*ipersteno* nettamente cuspidati.

Terreno morenico di Alice Castello e Borgo d'Ale (10-11).

I due campioni di terreno qui elencati provengono dalle pendici esterne delle morene dell'anfiteatro d'Ivrea. Possono quindi ritenersi come terreno morenico rimaneggiato.

Il terreno di Alice Castello (n. 10), di color giallo-bruno intenso, ricco di parte organica, lascia al solito trattamento un residuo sabbioso grossolano del 33 %. Non fa effervescenza a freddo con acido cloridrico, ma dà tracce di effervescenza a caldo.

Nel residuo lavato, di color grigio chiaro, appare abbondante il *quarzo* incolore e latteo, mentre scarseggiano i *feldspati*. Non si osserva nè microclino nè pasta felsitica.

Fra gli elementi pesanti caratteristica l'abbondanza di *anfiboli chiari*, di *orneblenda* e di *glaucofane*. Presenti, ma scarsi, i *pirosseni rombici* e *monoclini*. Non osservata l'*orneblenda bruna*.

Il terreno di Borgo d'Ale (n. 11) non differisce per nessun carattere saliente dal precedente. Col solito trattamento dà un residuo sabbioso grossolano del 31 %.

Terreni di Saluggia, Tronzano e Bianzè (12-13-14).

Il campione n. 12, prelevato a S. Sebastiano presso Saluggia, appartiene all'alluvium della Dora. È di color giallo-bruno chiaro e trattato con acido cloridrico dà tracce di effervescenza a caldo. Contiene dunque anch'esso, come la sabbia attuale della Dora (E), un po' di *dolomite*. Trattato nel solito modo lascia un residuo sabbioso grossolano del 38 %.

Per composizione il residuo non differisce in nulla, pei ca-

Digitized by Google

ratteri essenziali, dal campione E. Caratteristica l'abbondanza, notevole anche per un'alluvione aostana, del *glaucofane*. Presenti, scarsissimi, il *microclino* e l'*orneblenda verde-bruna*.

I campioni 13 e 14, provenienti rispettivamente da Tronzano e da Bianzè, possono ritenersi entrambi del diluvium superiore di origine aostana, e non differiscono molto l'uno dall'altro, nè per aspetto esterno nè per composizione. Noto tuttavia nel primo un residuo grossolano del 36 % e nel secondo del 20 %; ciò che può esser d'accordo con la posizione più bassa di quest'ultimo nella pianura. Noto inoltre in questo la presenza in piccola quantità di carbonati ed una maggiore scarsità di elementi pesanti.

Pel resto i caratteri sono quelli di un'alluvione di Dora, ossia vi abbiamo come al solito una forte percentuale di anfiboli verdi e azzurri fra gli elementi pesanti, e come indizio di relativa antichità la presenza di anfiboli cuspidati e di granati corrosi, oltre ad una scarsità notevole di feldspati sani.

Terreni di Popolo e di Morano sul Po (15-16).

Si tratta di terreni alluvionali recenti del Po, paragonabili quindi al campione F di Crescentino.

Il terreno di Popolo presso Casale (15) di color bruniccio-chiaro, levigato nel solito modo, lascia un residuo sabbioso che sale al 42 %. Trattato con acido cloridrico dà sensibile effervescenza a freddo e prende il colore grigio freddo già notato per la sabbia padana.

L'aspetto generale è fresco. Predominano fra gli elementi leggeri il *quarzo* e l'*ortoclasio*. Abbondanti la *muscovite*, gli *anfiboli* chiari e quelli verdi e relativamente scarso il *glaucofane*. La *biotite*, scarsa, non è quasi mai alterata. Scarsissimi i *pirosseni*.

Il terreno di Morano (n. 16), molto simile al precedente, lascia un residuo sabbioso del 36 % e fa pochissima effervescenza con acido. I caratteri padani del terreno, salva la scarsità de' carbonati, sono più accentuati ancora che nel precedente campione.

Digitized by Google

Terreni di Tricerro, Trino e Costanzana (17-18-19).

I terreni qui elencati appartengono al diluvium superiore terrazzato della così detta Costa di Trino. Essi hanno i caratteri essenziali delle alluvioni della Dora o di alluvioni miste Dora-Po.

Il campione 17 fu prelevato alla Cascina Gerbidi, presso Tricerro. È giallo ocraceo e con la levigazione perde una forte quantità di detrito fino ocraceo, lasciando un residuo grossolano non superiore al 25% .

È privo completamente di *carbonati* e scarsissimo di *plagioclasi*, i quali sono per giunta tutti alterati. Alterato è pure l'*ortoclasio*. Fra gli elementi pesanti, piuttosto scarsi, predominano gli *anfiboli verdi* e *azzurri* e la *muscovite*. La enorme scarsità di *pirosseni*, di *anfiboli bruni* e la mancanza di *microclino* escludono che l'alluvione possa aver relazioni col bacino della Sesia.

Nel complesso, il terreno mostra i caratteri di una ferrettizzazione abbastanza avanzata, compresa la cuspidatura degli anfiboli, non lontana da quella del ferretto tipico di baraggia, quantunque la sua età sia probabilmente più recente. E lo stesso potrebbe ripetersi pei due terreni successivi.

Il campione n. 18 proviene da Ramezzana presso Trino. Il residuo sabbioso è solo del 22% e con la levigazione si asporta molto detrito fino fortemente ocraceo. Nessuna effervescenza con gli acidi. L'avanzata alterazione è anche qui dimostrata dall'alterazione dei feldspati e dal succhiamento degli *anfiboli verdi* e dei *granati*. Mancano il *microclino* ed i *pirosseni rombici*. Presente qualche rara *orneblenda verde-bruna*.

Il campione n. 19 fu prelevato fra Costanzano e Torrione, ed è il più occidentale dei tre. Il residuo è del 25%. Non fa effervescenza con acido cloridrico. Anche per tutti gli altri caratteri essenziali è affatto simile al precedente.

Terreni della pianura a sud e ad ovest di Vercelli (20-21-22-23-24).

I terreni qui elencati provengono dal diluvium superiore (terrazziano) dei dintorni di Vercelli, e specialmente i primi quattro sembrano sostanzialmente identici.

Digitized by Google

Il quarto, ch'è il più meridionale di tutti, si avvicina invece nettamente ai terreni or ora descritti della Costa di Trino.

I numeri 20, 21, 22 e 23 provengono rispettivamente da Sali, da Costanzana, da Salasco e da Salasco sud; il 24 proviene da Ronsecco e fu prelevato presso la Cascina Cavallo.

I primi tre, di color bruniccio chiaro, con la solita levigazione, lasciano un residuo del 30 % circa, sono sensibilmente ocracei e non dànno traccia di effervescenza nè a freddo nè a caldo.

I terreni di Sali e Salasco dànno l'impressione di un'alluvione mista d'origine aostana e biellese, con prevalenza di quest'ultima. La provenienza aostana pare provata dalla relativa abbondanza degli *anfiboli verdi* e *azzurri*, dell'*epidoto* e della *muscovite*; quella biellese dalla costante presenza di *pasta felsitica* rosa e bruna, e dalla relativa frequenza di *anfiboli bruni*.

Il terreno di Ronsecco, di color giallo ocraceo chiaro, non lascia che un residuo del 20 % ed è più fortemente ocraceo dei precedenti. Non fa effervescenza con acido cloridrico. Parmi che in esso si accentui la origine aostana per una maggiore frequenza di *anfiboli azzurri* e di *muscovite*, mentre i *pirosseni*, gli *anfiboli bruni* e la *pasta felsitica* si riducono di molto o scompaiono affatto.

Terreno di Quinto Vallasino (25).

Campione prelevato dall'alluvium dell'Elvo. Il terreno ha color giallo-bruno, non fa effervescenza con acido e lascia un residuo abbondante (il 43 %). È opportuno confrontarlo col campione E.

Il residuo è ricco di feldspati, rappresentati in misura non molto diversa da *ortoclasio* e da *plagioclasio sodico-calcico*, mentre il *microclino* è eccezionale.

Nella parte pesante, che dà l'impressione di una freschezza ancora maggiore, gli *anfiboli*, prevalentemente verdi, appaiono perfettamente conservati; e così può ripetersi del *granato*. La *biotide*, scarsa, è invece di solito trasformata in mica dorata.

Terreno di Pezzana (26).

Il campione di terreno fu prelevato dall'alluvium presso il letto della Sesia, una dozzina di chilometri sotto Vercelli.

Digitized by Google

Sia per quanto riguarda lo stato di conservazione, sia in riguardo alla composizione mineralogica, il campione si direbbe alquanto aberrante; e per questo appunto sembra degno di maggiore interesse.

Il colore è giallo ocraceo e mancano interamente i carbonati. Il residuo giunge appena al 23%.

I caratteri mineralogici rispondono perfettamente a quelli di una sabbia di Dora o tutt'al più ad una alluvione mista Dora-Po. Mancano infatti, o sono scarsissimi, il *microclino*, i *pirosseni rombici* e l'*orneblenda bruna*, così caratteristici nelle alluvioni sesiane, e sono invece abbondanti gli *anfiboli verdi* e *azzurri* e la *muscovite*. La provenienza, ch'io credo indubbiamente occidentale di questa alluvione, sarebbe del resto d'accordo col fatto, da me enunciato sin da principio, che tutta la parte meridionale del Vercellese è essenzialmente formato da alluvioni aostane. Questa constatazione confermerebbe anche l'idea che il corso della Sesia si sia spostato durante il quaternario da est ad ovest, e che questa corra oggi sul margine occidentale delle sue alluvioni.

Terreno di Ricorvo-Lomellina (27).

Questo terreno, posto sulla sinistra della Sesia, ha invece tutti i caratteri di un'alluvione sesiana: ciò che del resto non può stupire.

È un terreno molto fresco, contenendo una quantità notevolissima di feldspati relativamente ben conservati e qualche carbonato. Levigato, lascia un residuo molto scarso (circa il 16%), ma non bisogna dimenticare che si tratta di un'alluvione molto bassa e di conseguenza già originariamente fina.

Caratteri salienti la forte percentuale di *ortoclasio* e quella relativamente forte di *microclino*; la quantità pure notevole di *orneblenda bruna* e di *pirosseno rombico* e di *granato*, la scarsità di *glaucofane*.

Abbastanza tipica pure la presenza, fra i minerali più rari, della *staurolite*.

Digitized by Google

Terreni di Madonna delle Vigne e di Monte Nuovo di Trino (28-29-30).

I terreni qui descritti appartengono al lembo di diluvium antico che le carte geologiche segnano a nord di Palazzolo Vercellese e di Trino, sul margine meridionale del diluvium superiore terrazzato dal Po.

I terreni si assomigliano perfettamente e recano i segni di una ferrettizzazione abbastanza profonda, se non profondissima. Il colore è in tutti giallo-ocraceo; il residuo lasciato è del 20 %, del 18 % e del 10 % rispettivamente. I primi due fanno un po' di effervescenza con acido cloridrico diluito, specialmente a caldo. Ciò che confermerebbe che l'alterazione non è così completa come nei terreni di baraggia tipici. È però indubitato che la ferrettizzazione è molto pronunciata, sebbene irregolare, e in genere si distacca nettamente da quella dei terreni del terrazziano tra i quali questo lembo si trova.

Riguardo alla provenienza dell'alluvione, credo che si possa ritenere piuttosto aostana che prettamente padana, o, tutt'al più, può essere mista.

I caratteri di Dora, come pure quelli della pronunciata ferrettizzazione, compaiono specialmente nel campione 29, privo di carbonati, ricco di ocra e di *anfiboli* e *granati* corrosi. Generale l'abbondanza di *glaucofane* e di *muscovite*, e la scarsità o assenza di *microclino*, di *pirosseni rombici* e di *orneblenda bruna tipica*.

***

Nella tabella che segue, in cui sono rappresentati sinteticamente i risultati dell'analisi mineralogica del residuo sabbioso di ciascun terreno, si adotta la scala di frequenza proposta dall'Artini; e cioè:

1: *Copiosissimo.* — 2: *Copioso.* — 3: *Abbondante.* — 4: *Discretamente abbondante.* — 5: *Molto comune.* — 6: *Comune.* — 7: *Piuttosto scarso.* — 8: *Scarso.* — 9: *Scarsissimo.* — 10: *Raro.*

Queste denominazioni vanno intese con qualche larghezza, e sono in certo modo relative. Non corrispondono sempre alla terminologia usata nel testo, in cui s'è spesso, ad esempio, qualificato abbondante un componente che qui appare scarso. La

Digitized by Google

ragione sta nel fatto che il significato dei vari componenti è, a parità di diffusione, molto diverso in riguardo alla costituzione mineralogica del terreno ed alla diagnosi della provenienza delle varie alluvioni.

Riportiamo poi, per maggiore comodità, la provenienza dei vari campioni elencati nella tabella.

A — Sabbia viva della Sesia.
B — » » » Roasenda.
C — » » del Cervo.
D — » » dell'Elvo.
E — » » della Dora Baltea (a Saluggia).
F — » » del Po (a Crescentino).
1 — Terreno agrario di Villa del Bosco.
2 — » » di Roasio.
3 — » » di Masserano } (*diluvium antico*).
4 — » » di Buronzo nord }
5 — » » di Buronzo sud (destra del Cervo).
6 — » » di Lenta } (*diluvium sup. terrazzato*).
7 — » » di Arborio }
8 — » » di Roasenda (casc. S. Giacomo) (*alluvium*).
9 — » » di Buronzo (*alluvium*).
10 — » » di Alice Castello (*morenico rimaneggiato*).
11 — » » di Borgo d'Ale (*morenico rimaneggiato*).
12 — » » di Saluggia (*alluvium*).
13 — » » di Tronzano } (*diluvium superiore*).
14 — » » di Bianzè }
15 — » » di Popolo } (*alluvium*).
16 — » » di Morano }
17 — » » di Tricerro
18 — » » di Trino } (*diluvium superiore*).
19 — » » di Costanzana (sud)
20 — » » di Sali
21 — » » di Costanzana (nord) } (*diluvium superiore*).
22 — » » di Salasco (nord)
23 — » » di Salasco (sud)
24 — » » di Ronsecco (*diluvium superiore*).
25 — » » di Quinto Vallasino (*alluv. dell'Elvo*).
26 — » » di Pezzana (*alluvium*).
27 — » » di Ricorvo-Lomellina (*alluvium sesiano*).
28 — » » di Mad. delle Vigne (*diluvium antico*).
29 — » » di Trino Monte Nuovo (*diluvium antico*?).
30 — » » di Trino Costa (*diluvium antico*?).

Digitized by Google

Tabella di frequenza (Scala Artini) dei minerali, delle sabbie e dei terreni agrari del Vercellese.

	A	B	C	D	E	F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Oro	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Quarzo	3	3	2	1	1–2	1	1	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1–2
Calcedonio organogeno	—	9	—	—	—	—	3	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Corindone	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ilmenite	7	7	8	8	9	8	9	9	8	8	8	8	7	7	8	9	8	8	9	8	8	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	8	8
Magnetite	7	7	8	8	9	8	9	9	9	9	10	7	7	8	8	7	7–8	7	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8	9	8	9	9	8	8	8
Rutilo	—	—	9	10	10	9	—	—	8	8	10	9	9	10	10	9	9	9	9	9	9	—	9	—	9	9	—	9	9	9	10	9	—	10	9	9
Brookite	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Limonite	—	—	—	—	—	—	7	5	5	7	7	8	7	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Carbonati romboedrici	10	—	—	—	10	7	6	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	9	7	—	—	—	—	—	9	9	9	7	7	7	—	7	7	6
Ortoclasio	5	8	5	5	4–5	4	8	10	8	7	7	8	8	8	7	9	8	7	7–8	7–8	5	4–5	5–6	7	6	7	7	7	7	5	5	5	4	7	8	—
Microclino	7	—	10	10	—	—	—	—	10	—	—	8	8	—	9	—	—	9–10	—	—	—	10	—	—	—	10	—	—	—	10	10	8	5–6	5–6	5	5–6
Plagioclasi sodico-calcici	6	9	8	5	8–9	8	9	10	8	9	9	8	8	—	7	10	9	9	8	8	8	8	9	9	9	8	9	9	9	8	5	8	7	8	8	8
Pirosseni rombici	7	—	8	10	8	10	—	10	8	—	10	7	7	8	8	8	9	9	9	9	10	9	10	—	?	10	10	10	10	9	10	9	8	9	8	—
„ monoclini	9	—	9	10	9	8	—	—	10	—	—	9	10	9	9	9	9	9	10	9	—	9	10	10	—	10	10	10	—	9	—	10	9	?	9	9
Anfiboli chiari	8	8	7	7	7	7	8	9	9	7	8	9	8	9	9	7–8	7	7	8	7	7	7	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
Orneblenda verde	8	8	6–7	7	5–6	6	8	9	10	9	8	8	8	8	8	7–8	7–8	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
„ bruna	7	—	9	9	10	10	—	—	—	—	—	8	8	9	7	—	—	10	—	9	—	9	9	9	9	8	8	8	9	9	9	8	7	—	9	9
Glaucofane	9	10	8	8	6	7	—	10	7	8	9	9	10	9	9	7	7	6	7	7–8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	7	9	7	7	5
Granato	5	8	7	7	7–8	6–7	9	9	9	8	8	7	7	8	7	7	7	7	7	9	8	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7
Cordierite	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7–8	7	7	7
Zircone	9	9	8	10	10	9	9	9	8	8	8	9	9	10	9	9	8–9	8	9	10	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	8	9	9	8–9
Sillimanite	9	—	—	—	—	—	—	9	9	—	9	10	9	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	9	9	—	—	—	—	8	—	—	—
Cianite	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—
Andalusite	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Epidoto	7	8	7	7	7	6	8	9	7	7	7	8	8	8	7	8	8	8	8	8	7	7	8	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8
Zoisite-clinozoisite	9	—	7	9	7	8	—	—	10	9	9	9	9	9	9	10	9	9	8	8	7	8	9	8	8	9	9	9	9	9	9	9	10	7	9	8
Titanolivina	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Tormalina	—	—	—	10	—	9	10	—	9	9	—	10	10	—	—	—	—	—	—	—	10	10	10	—	10	—	—	—	—	—	10	—	8	9	—	—
Staurolite	10	—	9	10	—	—	—	—	—	—	10	10	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	8	—	—	—
Muscovite	7	8	6–7	7	6	6	7	7–8	8	7–8	7–8	7	8	8	8	8	8	8	8	9	6	6	7	8	7	8	8	8	8	8	7	6–7	7	7	8	7
Sericite	—	8	—	—	—	—	9	9	—	—	—	9	—	9	9	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Biotite	8	10	8	9	10	9	9	9	—	10	10	8	6–7	9	8	8	7	8	9	9	8	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
Clorite	8	9	7	8	7	8	9	10	8	8	8	9	8	9	8	8	8	8	9	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8
Cloritoide	—	—	—	—	10	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	10	—	10	—	10	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	10	10	10
Serpentino	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	—	9	—	9	10	—	—	—	9	—	9	—	—	—	—	10	10	—	10	9	—
Titanite	—	—	9	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	10	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	10
Spinello	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Apatite	10	10	10	10	10	10	—	—	—	10	—	10	10	—	—	—	10	10	?	?	10	10	10	10	—	10	10	10	10	—	?	10	10	—	—	—
Pasta felsitica	4	—	—	—	—	—	5	4	9	7	8	10	10	9	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8	8	8	8	9	—	—	—	—	—	—

Digitized by Google

Digitized by Google

Attenuazione dissimmetrica di energia raggiante in un mezzo assorbente.

Nota del Socio nazionale residente Q. MAJORANA

Da qualche anno ho intrapreso ricerche sperimentali per la realizzazione di sistemi telefonici ottici, mediante radiazioni invisibili. Ho già riferito in altra Accademia sui risultati ottenuti servendomi di radiazioni ultraviolette (*); e ho descritto gli apparecchi da me all'uopo ideati e sperimentati, il cui funzionamento si impernia sulla modulazione di un arco a mercurio (da me per la prima volta dimostrata come possibile) e sull'uso di una cellula fotoelettrica. Nella detta sede, ho inoltre recentemente riferito (**) sui perfezionamenti introdotti in tali dispositivi, al fine di assicurarne il funzionamento anche di pieno giorno, di rendere meno ingombranti gli apparecchi, ecc. E, proseguendo nello studio dell'argomento, ho inoltre detto di talune mie altre ricerche che mi hanno condotto ad utilizzare le radiazioni ultrarosse, al posto delle ultraviolette, modificando naturalmente i dispositivi. A questo nuovo indirizzo, ho rivolto la mia attenzione, nella speranza di poter realizzare un sistema di telefonia ottica con radiazioni invisibili, che più facilmente traversassero l'atmosfera, in certe condizioni di nebbia, pioggia o foschia, per le quali le radiazioni u. v. restano notevolmente affievolite.

Tralascio di accennare qui ai particolari dispositivi che mi hanno servito nella utilizzazione delle radiazioni u. r. per il detto

(*) " Rendiconti R. Accademia dei Lincei ,, vol. V, p. 726, 1927.
(**) Id., vol. IX, p. 924, 1929.

Digitized by Google

scopo. Dirò soltanto che impiego a tal fine, quale sorgente di radiazioni, una lampada elettrica a incandescenza intensiva (da 200 a 500 watt), della quale filtro, con un vetro all'ossido di manganese, delle λ di 1 micron circa. Le radiazioni di tale lampada, che sono praticamente fisse e costanti in intensità, vengono modulate mediante congegni elettromeccanici (*modulatori*), i quali proiettano quelle radiazioni dalla stazione trasmittente alla ricevente, lasciando convogliare nella loro intensità variabile i periodi acustici da trasmettere. Alla ricevente, le radiazioni u. r. cadono su di una cellula al tallio, probabilmente simile a quella detta dal Case *thalofide*, e che è stata da me costruita, con processo indicato altrove (*).

La telefonia ottica con radiazioni u. r., ha dato sin dalle prime prove, che ho avuto occasione di eseguire in questi ultimi mesi, ottimi risultati. Distanze dell'ordine dei 10 km. fra Bologna e le colline circostanti, sono state facilmente superate. E tuttora sono in corso esperienze, per studiare questo nuovo metodo di telecomunicazione.

Scopo della presente Nota è di riferire su certi fatti di di attenuazione della trasmissione della parola mediante le dette radiazioni (u. v. oppure u. r.), che ho potuto osservare, quando l'atmosfera, compresa tra le due stazioni, non è del tutto limpida, e più particolarmente, quando tale difetto si manifesta non uniformemente lungo tutta la visuale congiungente le due stazioni.

Accennerò subito ai fatti; dirò poi del modo con cui ho controllato la loro esistenza con ricerche di laboratorio; ed infine stabilirò la teoria probabile dei fatti stessi.

Sperimentavo con due stazioni poste ad una distanza dell'ordine di 10 km. (**), essendo esse fornite di impianto duplice per telefonia ottica con raggi u. v. Esperienze del genere, vengono di solito da me condotte, puntando dapprima tutto il fascio

(*) Majorana e Todesco, " Rendiconti R. Acc. dei Lincei ", agosto, 1928.

(**) Più precisamente fra Bologna (Istituto Fisico A. Righi) e Monte Calvo; distanza km. 8,800.

Digitized by Google

di radiazioni della lampada a mercurio da ciascuna stazione, verso l'altra, senza filtrare, mediante il vetro all'ossido di nichel, le sole radiazioni u. v. La recezione è, in tali condizioni, molto forte da entrambi i lati; almeno quando le condizioni di reciproca visibilità delle due stazioni, sono ottime od anche solo buone. La intensità di recezione si affievolisce notevolmente per l'interposizione dello schermo suddetto, che rende il fascio completamente invisibile. Tale affievolimento è, in buone condizioni, e per uno schermo non troppo opaco, di circa il 70 % dell'intensità totale. Ma tuttavia, se le condizioni atmosferiche non sono avverse, la recezione è ancora nettamente possibile.

Si comprende così, che col peggiorare delle condizioni atmosferiche, possa venire a mancare la recezione in sola luce u. v., mentre può continuare a sussistere quella in luce totale. Ma il fatto, che a prima vista non si spiega facilmente, è il seguente: talvolta, la recezione in una delle stazioni è più debole che nell'altra. Sperimentando una sera dello scorso aprile fra le due dette stazioni, mentre era possibile parlare in luce totale da parte delle due stazioni, veniva a mancare quasi completamente la recezione a Bologna, quando Monte Calvo oscurava la sua lampada con vetro al nichel; era invece possibile a Monte Calvo sentire Bologna, quando questa stazione oscurava col proprio schermo le sue radiazioni.

Scartata l'ipotesi di una dissimmetria dei due impianti (che funzionano egregiamente in serate di perfetta trasparenza dell'atmosfera); osservato che probabilmente la trasparenza dell'atmosfera non era ottima; non rimaneva ad ammettere che una certa dissimmetria nelle condizioni di trasparenza lungo tutto il tratto visuale delle stazioni. È evidente infatti, che ammettendo: l'assoluta eguaglianza delle parti costituenti le due stazioni (sorgente, congegno modulante, schermo all'ossido di nichel, cellula fotoelettrica, amplificatore telefonico, cuffia telefonica); e l'omogeneità dell'atmosfera, lungo tutta la visuale, sia pure con un forte potere assorbente ma costante in tutti i punti; non sarebbe stato possibile dare alcuna spiegazione del fenomeno.

Guidato da questi criterii cercai di controllare con l'osser-

Digitized by Google

vazione visiva diretta, la diversa omogeneità dell'atmosfera, durante l'esperimento citato. Forse fu giudicato complessivamente dalle persone che si trovavano alle due stazioni, che un po' più di nebbia si stendesse su Bologna, che non su Monte Calvo; ma può anche darsi che tale dissimmetria fosse addirittura inversa. Senza vagliare esattamente tale conclusione quantitativa, ammetto per ora come certo il fatto generico di una dissimmetria nell'assorbimento da parte dell'atmosfera, delle radiazioni, lungo la visuale stendentesi fra le due stazioni.

L'esistenza dell'effetto in parola, è stata inoltre da me controllata con esperienze in laboratorio. Si sono adoperate alternativamente radiazioni u. v. e u. r. Queste ultime hanno per ora dato risultati meno sicuri; e riferisco perciò su quelli ottenuti soltanto con le u. v. Una lampada a mercurio è posta all'estremità di un corridoio, lungo circa 90 metri. La sua luce è concentrata verso l'altra estremità, mediante una lente. Con tutto ciò, è a ritenersi che il fascio di raggi non sia parallelo: l'immagine dell'arco a mercurio si proietta infatti sul fondo del corridoio con una estensione di più metri, cioè fortemente ingrandita. Qui, una cellula fotoelettrica è colpita dalle radiazioni, che sono concentrate su di essa mediante una lente di 8 cm. di diametro e di 10 cm. di fuoco. Un galvanometro Moll è inserito in circuito con la cellula, insieme con una f. e. m. di 120 volt circa (inferiore alla tensione di accensione della cellula). Si fanno così delle letture di deviazione galvanometrica, alternativamente, quando immediatamente davanti alla lampada si pone o si toglie lo schermo di vetro all'ossido di nichel. Si trova che tali letture stanno nel rapporto $r = 0{,}25$. Si ripete l'osservazione quando si pone lo schermo davanti alla cellula (cioè all'altro estremo del corridoio). Quel rapporto diventa $r' = 0{,}27$. Queste cifre, citate a mo' d'esempio, sono state controllate con molte determinazioni che qui non riporto. Risulta dunque la seguente proposizione: *Sia un fascio di radiazioni divergenti che percorre un certo tratto di lunghezza L. La sua intensità è affievolita nel rapporto r quando si pone attraverso il raggio un tratto assorbente (il vetro al nichel) all'inizio del percorso L, cioè dove le radiazioni sono più concentrate. La stessa intensità si riduce*

Digitized by Google

nel rapporto r', essendo r' > r, quando il tratto assorbente viene interposto verso la fine di L, cioè là dove le radiazioni si sono, per la loro divergenza, assai diffuse.

Veramente la differenza tra i due rapporti r ed r' controllati sperimentalmente, è troppo poca cosa, per lasciar credere che essa senz'altro spieghi quanto è stato osservato nel caso delle recezioni telefoniche, tra Bologna e Monte Calvo. Ma è d'altra parte da notarsi, che in tale caso la distribuzione dell'assorbimento lungo un tratto, che è circa 100 volte maggiore, può essere ben diversa da quella occasionata dal vetro all'ossido di nichel nell'esperimento di laboratorio. In questo, si è inteso sostituire al banco di nebbia, sia pur leggera ma lunga forse qualche chilometro, il vetro al nichel dello spessore di 1 mm., circa. Inoltre, la divergenza dei raggi dà luogo ad un affievolimento di intensità ben superiore nel caso della grande distanza. I due casi non sono dunque quantitativamente, e forse nemmeno qualitativamente, paragonabili. Ma è sintomatico il divario che pur è stato riscontrato nei valori di r ed r'; divario che almeno dà l'indizio di una conferma generica del fenomeno constatato.

Quanto precede, mi ha indotto a condurre una indagine teorica del constatato fenomeno, che passo ad esporre.

Osservo anzitutto, che comunque si disponga il congegno diottrico davanti alla lampada a mercurio, il fascio di raggi emergente, specialmente se studiato a una distanza notevole (tale cioè che di fronte a questa, sia trascurabile l'apertura del sistema diottrico), deve considerarsi come divergente, e mai come parallelo. Il parallelismo dei raggi non potrebbe ottenersi che con una sorgente idealmente puntiforme e con un sistema rifrangente o riflettente esattamente stigmatico. Le comuni lenti, in conseguenza delle gravi aberrazioni di sfericità, della mancanza di correzione cromatica (tanto più notevole in quanto si tratti promiscuamente di regioni visibili ed invisibili dello spettro), e della estensione del cratere luminoso della lampada a mercurio (o di altra sorgente), dànno evidentemente fasci assai divergenti. E tali fasci producono illuminamenti che, a partire da una diecina di metri di distanza dalle lenti in parola, variano praticamente in ragione inversa del quadrato delle distanze.

Digitized by Google

Se diciamo I_1 la intensità alla distanza 1 dalla sorgente (supposta idealmente puntiforme), la intensità alla distanza x sarà:

$$i = \frac{I_1}{x^2} . \qquad (1)$$

Differenziando tale eguaglianza si ha l'espressione

$$di = -\frac{2i}{x} dx ;$$

che corrisponde alla variazione elementare, lungo l'elemento dx dell'intensità i, e che, a causa del segno negativo, equivale ad un'attenuazione (*attenuazione per divergenza dei raggi*).

Ma l'energia che si raccoglie alla stazione ricevente, si può andare affievolendo, col crescere della distanza, in causa di assorbimento progressivo dovuto alla mancanza di trasparenza assoluta del mezzo. Se questo è omogeneo, si può ammettere che, attraverso l'elemento dx, la variazione di dell'intensità, intesa come sola *attenuazione per assorbimento del mezzo,* sia espressa da:

$$di = -pi\, dx , \qquad (2)$$

dove p è una costante. In altri termini, si suppone che l'assorbimento sia proporzionale alla intensità, a parità di condizioni del mezzo. La precedente equazione, integrata, dà

$$i = k\, e^{-px}.$$

La costante k, nel caso di un fascio idealmente parallelo, risulta eguale al valore I_0 della intensità alla stazione trasmittente, perchè in tale punto l'esponenziale si riduce all'unità. Si ha così:

$$i = I_0\, e^{-px}.$$

Se il fascio non è parallelo, ma divergente, e cioè partente idealmente da un punto, origine delle distanze x, in tale punto l'intensità, intesa come illuminamento di una superficie posta nell'immediata vicinanza, è infinita. Conviene perciò anche qui riferirsi ad un punto posto p. es. alla distanza unitaria e di-

Digitized by Google

cendo I_1 l'intensità raccolta in quel punto, dare all'integrale della (2) la forma:

$$i = I_1 \, e^{p(1-x)}. \tag{3}$$

In pratica, entrambe le attenuazioni a cui si è fatto cenno entrano in giuoco, quando si abbia a che fare con la propagazione di un fascio divergente in un mezzo assorbente; e cioè il di complessivo sarà espresso da:

$$di = -\frac{2i}{x}\,dx - pi\,dx. \tag{4}$$

L'integrale di questa equazione, che assume il valore I_1 alla distanza 1, è:

$$i = I_1 \frac{e^{p(1-x)}}{x^2}. \tag{5}$$

Questa espressione ci dice che l'intensità i corrisponde ad una attenuazione della intensità I_1 ottenibile moltiplicando questa per entrambi i coefficienti di attenuazione già indicati nelle relazioni (1) e (3).

Il valore dell'intensità i espresso dalla (5) è lo stesso tanto che l'energia raggiante parta da un estremo che dall'altro del tratto x e lo percorra in tutta la sua lunghezza. Beninteso che esso assumerà nei due casi l'intensità I_1 alla distanza unitaria contata da uno o dall'altro estremo. Ciò è evidente, se p è costante in tutti i punti del mezzo. Ma ci si può domandare che cosa avvenga se p varia con x. In tale caso l'integrazione della (4) dà:

$$i = \frac{I_1}{x^2} \, e^{-\int_1^x p dx};$$

dove I_1 è sempre la intensità, alla distanza unitaria, e p, a differenza della (5), rappresenta una certa funzione della x. La integrazione indicata verrà estesa ad un valore di x che corrisponderà alla distanza L delle due stazioni. E si comprende che, se tale distanza è molto grande rispetto all'unità (p. es. se

Digitized by Google

si tratta di 10.000 metri, e si sceglie come unità il metro), tale integrale sarà praticamente lo stesso dell'altro:

$$\int_0^x p\,dx\,. \tag{6}$$

Ciò almeno quando la funzione p non presenti discontinuità o punti singolari, come è assai verosimile. Per cui, se si invertono di posto le due stazioni, lasciando sempre la stessa legge di distribuzione del coefficiente di attenuazione p lungo il tratto L, il valore dell'integrale (6) sarà ancora lo stesso, perchè verrà ad essere mutato non solo il segno del differenziale dx, ma anche il segno dell'integrale, i cui limiti saranno invertiti. Rimane dunque immutato il valore di i.

Si deduce quindi che *il valore di i, cioè la intensità raccolta in una delle stazioni (perchè dall'altra viene irradiata sotto forma di un fascio divergente una certa intensità, di cui era stato indicato con* I_1 *il valore alla distanza unitaria) sarà la stessa, indipendentemente dal senso della propagazione, e ciò qualunque sia la legge di distribuzione del coefficiente di assorbimento p lungo il tratto fra le due stazioni.*

In vista di questo risultato e prima di andare avanti, poniamoci da un punto di vista generale, nel considerare il fenomeno di attenuazione di energia raggiante, propagantesi attraverso un mezzo, dovuta a più di una causa. Suppongasi, anzitutto, che nella propagazione di tale energia, si verifichi un'attenuazione esprimibile in forma differenziale con una legge del tipo:

$$di = -pf(i)\,dx\,, \tag{7}$$

secondo la quale, in ogni tratto della linea di propagazione, la intensità i raccolta (cioè quella che cade su una determinata superficie) subisca una diminuzione proporzionale ad una certa funzione $f(i)$ della intensità stessa, e che sia il coefficiente di proporzionalità o di attenuazione p eventualmente variabile col posto.

Nella (7) si separano immediatamente le variabili e si integra fra due limiti a, b di x, scrivendo:

$$\int_{i_a}^{i_b} \frac{di}{f(i)} = -\int_a^b p\,dx\,,$$

Digitized by Google

dove i_a e i_b sono i valori che assume i, in conseguenza del complesso fenomeno, nei punti a, b.

Indichiamo con $\bar{p}$ il valore medio di p nel tratto (a, b), sarà:

$$p = \frac{1}{b-a} \int_a^b p\, dx .$$

Se diciamo $F(i)$ una funzione primitiva o integrale di $1/f(i)$, potremo scrivere:

$$F(i_b) - F(i_a) = (a - b)\, \bar{p} .$$

Questa relazione ci dice che la variazione dell'intensità, in conseguenza del fenomeno di attenuazione lungo un determinato tratto, dipende solo dal valor medio di p lungo tutto il tratto; per conseguenza essa deve essere indipendente dal senso di propagazione.

Ma questa indipendenza può ancora essere dimostrata nel caso in cui coesistano più fatti di attenuazione, purchè questi sodisfino a certe condizioni di analogia. Suppongasi che i relativi coefficienti siano p_1, p_2, ...; e sieno $f_1(i)$, $f_2(i)$, ... le relative funzioni che servono a definire come nella (7) dei particolari valori della variazione di. Si ammetta ancora che vi sia proporzionalità (od anche eguaglianza) tra tali coefficienti, o tra tali funzioni; talchè sieno sodisfatte le relazioni:

$$p_1 = h_1 p , \quad p_2 = h_2 p , \ldots ;$$

oppure le altre:

$$f_1(i) = k_1 f(i) , \quad f_2(i) = k_2 f(i) , \ldots ;$$

essendo nei due casi così distinti, h_1, h_2 ... oppure k_1, k_2 ... delle costanti. È chiaro allora, che si potrà scrivere una relazione analoga alla (7), ma sotto una delle forme seguenti:

$$di = - p \,.\, \Sigma\, h f(i) \,.\, dx ;$$
$$di = - f(i) \,.\, \Sigma\, k p \,.\, dx .$$

E tali equazioni differenziali si integrano esattamente come

Digitized by Google

la (7); per cui valgono anche le conclusioni circa la simmetria delle trasmissioni per rapporto all'assorbimento.

Da quanto precede, appare chiaro che il fatto della simmetria della funzione deriva dall'aver potuto scrivere il valore della variazione elementare di in guisa che esso sia rappresentato da un solo termine esprimente il prodotto di una funzione della sola i per una funzione della sola x. Così essendo, è immediatamente possibile la separazione delle variabili e la conseguente integrazione per quadrature dei due membri. Perchè venga meno la simmetria, occorre intanto la coesistenza dei due fatti attenuativi, rappresentabili con espressioni di questo genere:

$$-p_1 f_1(i)\,dx\,, \quad -p_2 f_2(i)\,dx\,;$$

ma tali, che non si possano raccogliere in un solo termine dello stesso tipo. Ciò avverrà dipendentemente dalla particolare natura delle funzioni p ed f, o più semplicemente quando $p_1 \neq h p_2$ o $f_1 \neq k f_2$; essendo h, k delle costanti.

Nel caso fisico che si studia, l'attenuazione è dovuta a due cause. Una di esse, geometrica (attenuazione per divergenza), mai potrà venir meno, nè la sua espressione analitica può esser cambiata. Per essa:

$$p_1 = \frac{2}{x}\,, \quad f(i) = i\,.$$

Per l'altra causa, quella cioè corrispondente all'assorbimento, p è una funzione qualunque di x, e nessuna ipotesi particolare si può fare su di essa. Al fine di spiegare la dissimmetria osservata sperimentalmente, occorre ammettere che essa si verifichi con una legge del tipo $p f(i)\,dx$, dove $f(i)$ indichi una funzione diversa da i e p una funzione di x diversa da k/x (essendo k costante).

D'altra parte la funzione $f(i)$ deve differire poco da i; l'ipotesi più semplice è dunque che:

$$f(i) = i^{1+\epsilon}\,,$$

dove la quantità ϵ è piccola ma diversa da zero. Inoltre le osservazioni e le esperienze da me fatte, farebbero credere che

Digitized by Google

essa debba essere, nei casi studiati, positiva. L'attenuazione complessiva elementare sarà espressa da:

$$di = -\frac{2i\,dx}{x} - p i^{1+\varepsilon}\,dx\,,$$

od anche:

$$\frac{di}{dx} = -\frac{2i}{x} - p i^{1+\varepsilon}\,.$$

Questa equazione, posto $i^{-\varepsilon} = y$, e cioè

$$di = -\frac{1}{\epsilon} y^{-1-\frac{1}{\varepsilon}}\,dy\,,$$

si trasforma nell'altra:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x} + p\epsilon\,.$$

L'integrale di questa equazione è perfettamente determinato, non appena si assegni il valore i_a dell'intensità i in un punto qualunque di ascissa a, che, per evitare la considerazione di valori infiniti, dovrà essere diverso dall'origine. Ed esso è:

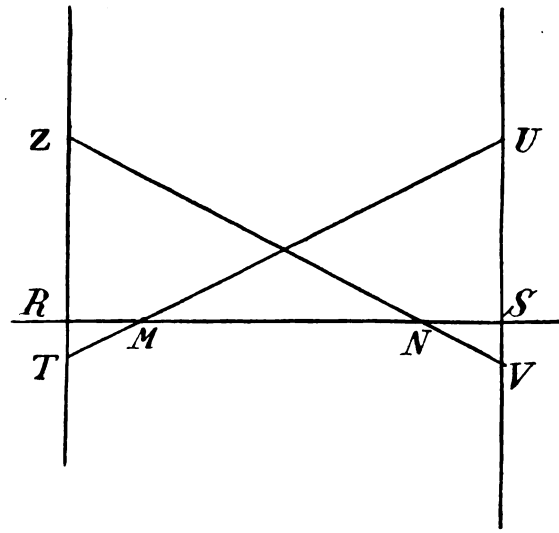
$$y = i^{-\varepsilon} = x^{2\varepsilon}\left(\epsilon \int_a^x p x^{-2\varepsilon}\,dx + i_a^{-\varepsilon}\right). \qquad (8)$$

L'esame di questa funzione, indipendentemente dalla possibilità di integrazione della funzione sotto il segno, fa comprendere come essa non possa dar luogo agli stessi valori della intensità i quando si inverta la distribuzione del coefficiente p lungo il tratto (a, x); salvo che p sia costante, nel qual caso, manifestamente, riappare la simmetria. Anzi, è facile verificare che, finchè $\epsilon \neq 0$, è questo l'unico caso in cui può verificarsi lo stesso valore di i in corrispondenza a distribuzione inversa del coefficiente p. Si osservi infatti che tale distribuzione inversa, in generale, corrisponde a considerare la funzione $p(a + b - x)$ in luogo di $p(x)$, dove con b si è indicata l'ascissa dell'estremo del tratto che si considera. Ora, se il secondo

Digitized by Google

membro della (7) non muta sostituendo $p(a+b-x)$ a $p(x)$, e ciò per qualunque valore di b, basta supporre $x=b$, per dedurne $p(a)=p(b)$, cioè, essendo a e b arbitrari, $p=\text{cost.}$

Per riferirmi ora ad un caso concreto, il quale dia anche luogo a relazioni analitiche non troppo complesse, si supponga di avere due stazioni R, S, situate alla distanza L. Lungo tale tratto, scelgo due punti M, N, rispettivamente distanti dai due estremi per i segmenti $RM=NS=a$. Sia $RN=b$; talchè $RS=a+b$ (vedi figura). I punti M, N si potranno in seguito supporre vicinissimi rispettivamente ad R ed S, talchè i tratti RM ed NS diventino piccolissimi ed anche trascurabili di fronte ad L.



Suppongasi ora che la distribuzione, lungo il tratto L, del coefficiente di assorbimento p, sia data dalla legge lineare

$$p_1 = A(x-a);$$

tale legge corrisponde al diagramma TU. Si comprende come questo diagramma non possa avere, con tutto rigore, significato fisico, giacchè secondo esso, nel tratto RM, p assumerebbe valori negativi, ed invece di assorbimento, in tale tratto vi sarebbe

Digitized by Google

guadagno di energia, il che è assurdo. Ma la rappresentazione grafica può risultare approssimata al vero quanto si vuole, in vista della piccolezza suddetta del tratto RM.

Nella figura, è segnata inoltre la retta VZ, la quale rappresenta il diagramma inverso di distribuzione di p, corrispondente alla equazione:

$$p_2 = A\,(b - x).$$

Sostituisco queste due espressioni particolari della funzione p successivamente, nella (8). Procedendo alle integrazioni, si hanno i valori i_1 e i_2 delle intensità in un punto qualunque distante per x dal punto R:

$$i_1^{-\varepsilon} = A\epsilon\, x^{2\varepsilon}\,\frac{x^{2-2\varepsilon} - a^{2-2\varepsilon}}{2 - 2\epsilon} - A\epsilon\, x^{2\varepsilon}\, a\,\frac{x^{1-2\varepsilon} - a^{1-2\varepsilon}}{1 - 2\epsilon} + \frac{x^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon},$$

$$i_2^{-\varepsilon} = A\epsilon\, b x^{2\varepsilon}\,\frac{x^{1-2\varepsilon} - a^{1-2\varepsilon}}{1 - 2\epsilon} - A\epsilon\, x^{2\varepsilon}\,\frac{x^{2-2\varepsilon} - a^{2-2\varepsilon}}{2 - 2\epsilon} + \frac{x^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon}.$$

Queste due espressioni sono diverse l'una dall'altra. E per metterle in forma più esplicita facciamo il caso di $x = b$. Si ha:

$$i_1^{-\varepsilon} = A\epsilon\,\frac{b^2 - a^{2-2\varepsilon}\, b^{2\varepsilon}}{2 - 2\epsilon} - A\epsilon\,\frac{ba - b^{2\varepsilon}\, a^{2-2\varepsilon}}{1 - 2\epsilon} + \frac{b^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon},$$

$$i_2^{-\varepsilon} = A\epsilon\,\frac{b^2 - a^{1-2\varepsilon}\, b^{2\varepsilon+1}}{1 - 2\epsilon} - A\epsilon\,\frac{b^2 - a^{2-2\varepsilon}\, b^{2\varepsilon}}{2 - 2\epsilon} + \frac{b^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon}.$$

Se, come si è detto più sopra, si suppone a piccolissimo di fronte a b, trascurando i termini in cui rientra quella grandezza, si può scrivere:

$$i_1^{-\varepsilon} = A\epsilon\,\frac{b^2}{2 - 2\epsilon} + \frac{b^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon},$$

$$i_2^{-\varepsilon} = A\epsilon\,\frac{b^2}{1 - 2\epsilon} - A\epsilon\,\frac{b^2}{2 - 2\epsilon} + \frac{b^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon}.$$

Così, la differenza tra i valori di i_1 e i_2 appare più evidente, rimanendo definitivamente stabilita la dissimmetria della

Digitized by Google

propagazione dell'energia raggiante, quando si facciano comulativamente le ipotesi della divergenza geometrica, della proporzionalità dell'assorbimento ad una potenza della intensità diversa da uno e della non uniforme distribuzione del coefficiente p di assorbimento lungo la visuale compresa fra le due stazioni.

Rimarrebbe ora da stabilire quale sia il valore di ϵ. Per ciò, soltanto l'esperienza potrà dare risposta esauriente; e soltanto allora si potrà tentare di compiere una valutazione numerica della differenza dei valori di i_1 e i_2. Non mi nascondo la difficoltà di questo problema pratico, dipendentemente dal fatto che non si saprà mai con precisione quale forma assumerà, nei singoli casi pratici, la funzione p. Ma comunque, confido di ricavare dalle esperienze o dalle osservazioni, dati sufficienti per confermare l'attendibilità della nuova ipotesi avanzata, sul fenomeno dell'assorbimento.

Termino questa Nota segnalando l'opera zelante prestata dal prof. G. Todesco, nella parte sperimentale e pratica di queste ricerche, e la cortese assistenza datami del prof. C. Rimini nella esecuzione degli sviluppi analitici.

Digitized by Google

Osservazioni litologiche e mineralogiche sul giacimento di Castiglione (Traversella).

Nota del Socio corrisp. LUIGI COLOMBA

(Con una tavola)

I.

Il giacimento a cui si riferisce la presente nota appartiene al gruppo dei giacimenti di Traversella i quali sono tutti dovuti, secondo quanto fu in modo sicuro riconosciuto da V. Novarese (1) ad intensi fenomeni di contatto e di estrazione magmatica, di carattere essenzialmente idatogenico, manifestatisi in diretto rapporto colla intrusione del massiccio dioritico di Valchiusella a spese dei banchi di calcare intercalati fra gli schisti cristallini di detta valle.

Questi giacimenti affiorano a diverse altezze lungo il vallone percorso dal torrente Bersella che sbocca nella valle principale in vicinanza immediata dell'abitato di Traversella, e fra questi quello di Castiglione è il primo che si incontra risalendo il detto vallone dopo quello di Riondello già da me ampiamente descritto unitamente alle rocce del massiccio (2). Esso trovasi

(1) V. Novarese, *L'origine dei giacimenti di Brosso e Traversella*, " Boll. del R. Com. Geol. Ital. „ (1901); *Die Erzlagerstätten von Brosso und Traversella in Piemont*, " Zeits. für prakt. Geol. „ 1902); *La serpentina di Traversella e la sua origine*, " Boll. del R. Com. Geol. Ital. „ (1902).

(2) L. Colomba, *Ricerche sui giacimenti di Brosso e Traversella. Parte I: Osservazioni petrografiche sul massiccio dioritico di Valchiusella*, " Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino „, Serie II, Tomo LXIII, (1911-12). — *Parte II: I fenomeni di metamorfismo e di deposito nei giacimenti inferiori di Traversella*, " Id. id. „, Serie II, Tomo LXVI (1914-15).

Digitized by Google

a poco più di un migliaio di metri di distanza da quest'ultimo, dal quale è separato da un avanzamento delle rocce dioritiche, essendo a sua volta contenuto in una loro posteriore rientranza.

Considerando la sua posizione e la sua altitudine appare evidente che esso si originò a spese di masse calcaree appartenenti agli stessi banchi che diedero origine al giacimento di Riondello e che vennero da questi staccate in seguito agli spostamenti determinatisi per la intrusione delle rocce dioritiche, al pari di quanto avvenne anche per i giacimenti superiori di Pian del Gallo, di Alpe Cima e di Montajeu (Montacuto).

La sua ampiezza riferita alle parti attualmente note, cioè a quelle che furono in passato oggetto di lavorazione, non è molto grande; si può però presumere che essa in altri tempi fosse maggiore avendosi a poche diecine di metri più in alto ed addossati alla parete del massiccio alcuni affioramenti di rocce pirosseniche analoghe a quelle che si trovano più in basso. Ciò lascia supporre che anticamente il giacimento avesse una maggiore estensione e che esso sia stato posteriormente ridotto alle attuali condizioni dai fenomeni di erosione torrenziale.

Percorrendo le gallerie superiori di Castiglione si nóta che, prima di raggiungere le formazioni metamorfiche, si incontra sempre una cortina di rocce dioritiche simili a quelle del massiccio. Tale fatto, che in passato indusse taluno a supporre che il giacimento fosse interstratificato nelle dioriti (ipotesi questa insostenibile perchè altre gallerie scavate al di sotto delle precedenti raggiunsero il massiccio senza incontrare traccia alcuna di formazioni metamorfiche), si può facilmente spiegare senza che occorra di ammettere una particolare origine per il giacimento di Castiglione. Basta infatti supporre che, al pari di quanto avviene negli altri giacimenti di Traversella, anche nel nostro caso si abbia qualche apofisi dioritica che, staccandosi dal massiccio, penetri negli schisti cristallini ed avvolga le masse metamorfiche.

Questa disposizione anzi darebbe anche ragione della maggiore intensità che si nota nei fenomeni di metamorfismo e delle più profonde modificazioni che si osservano nelle formazioni metamorfiche di Castiglione in confronto di quelle caratteristiche

Digitized by Google

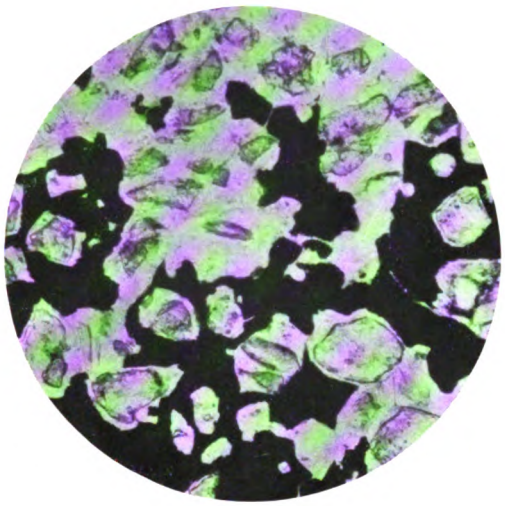


Fig. 1

Fig. 2

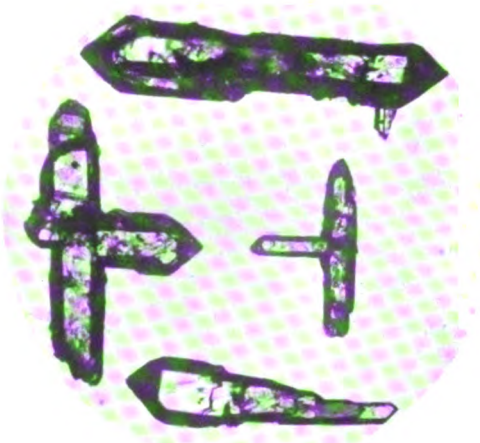


Fig. 3

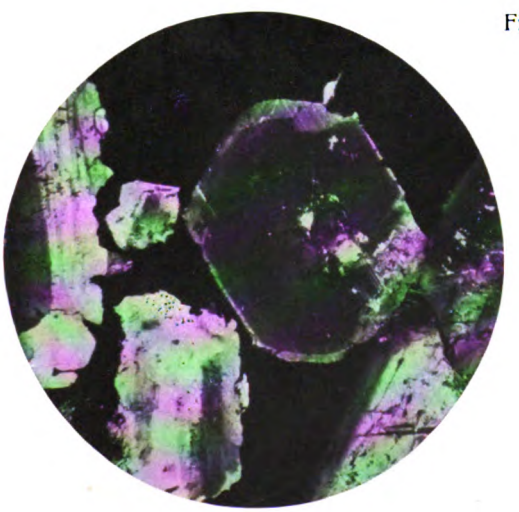
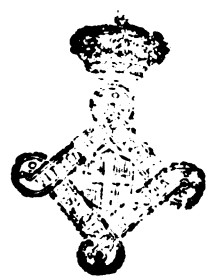


Fig. 4

Fig. 5

Digitized by Google



Digitized by Google

delle zone meno profonde del giacimento di Riondello, zone che sono per la loro posizione da considerarsi come equivalenti a quelle di Castiglione.

Infatti, come già ho accennato nei miei precedenti studi, in queste zone di Riondello le formazioni metamorfiche costituite prevalentemente da pirosseniti, accompagnate talvolta da anfiboliti e da qualche roccia olivinica, sono relativamente sane, mostrando solo tracce non molto intense di modificazioni posteriori rappresentate essenzialmente da una parziale loro serpentinizzazione dovuta ad azioni di tipo idatogenico manifestatesi inun secondo tempo durante la intrusione dioritica per opera di acque circolanti. Ora a Castiglione, dove le formazioni metamorfiche sono rappresentate da analoghi tipi di rocce, escluse le oliviniche, i fenomeni di serpentinizzazione sono molto più intensi ed estesi.

Così pure, mentre a Riondello i calcari sono ancora largamente rappresentati, invece a Castiglione mancano del tutto, avendosi solo scarse masse di carbonati ferro-magnesiaci che talvolta passano direttamente alla siderite. Lo stesso fatto si ha pure in quelle parti delle pirosseniti e delle anfiboliti in cui ancora si hanno tracce delle preesistenti masse calcaree, anch'esse però fortemente arricchite in ferro.

L'unico minerale metallifero veramente importante a Castiglione è la magnetite, che è diffusa nelle rocce metamorfiche in granuli, in vene ed in accentramenti ed ammassi anche di notevoli dimensioni. La pirite manca quasi completamente, comparendo solo, talvolta associata a calcopirite, in piccoli cristalli disseminati in talune delle masse di carbonati. Un minerale che, per quanto sempre molto raro, si può considerare come caratteristico per il giacimento di Castiglione è la molibdenite, già studiata da G. Lincio (1). Essa però, come ha fatto vedere il predetto autore, per il complesso dei caratteri delle sostanze che l'accompagnano, è da considerarsi come dovuta alla seconda

(1) G. Lincio, *La molibdenite del giacimento di Castiglione-Traversella*, Atti della Soc. dei Natur. e Matem. di Modena „, Serie V, vol. VII (1922).

Digitized by Google

fase metallifera che si manifestò in Valchiusella con caratteri schiettamente filoniani, contemporaneamente alla comparsa delle rocce porfiriche di Drusacco e dei dintorni di Brosso (1) ed alla quale è da riferirsi l'origine sia del giacimento piritifero di Brosso per quelle sue parti, e sono le maggiori, che si trovano lontane dal massiccio dioritico, sia di quelle limitate manifestazioni di carattere filoniano che si osservano, non solo in alcune parti dei giacimenti di Traversella, ma pur anche direttamente nelle rocce del massiccio, come nella località di Nasurg presso Vico Canavese, e negli schisti cristallini, come avviene alle grange di Pinacrosa sul versante sinistro del vallone di Bersella.

Anche la molibdenite partecipa di queste varie giaciture, avendone io constatato la presenza sotto forma di sottili spalmature negli schisti cristallini nelle zone prossime al giacimento in relazione con alcune fenditure che li attraversavano.

II.

Riassumo ora brevemente i risultati delle mie osservazioni sulle sopraccennate formazioni metamorfiche di Castiglione, per quanto si riferisce ai loro caratteri, in rapporto ai varî fenomeni da cui derivarono.

Cominciando dalle pirosseniti che ne costituiscono il gruppo più importante, si osserva che esse ad un semplice esame superficiale mostrano caratteri esterni di vere rocce serpentinose, presentandosi in masse compatte di color variante dal giallo cereo al verde-giallo ed al verde-bruno, dotate di frattura indistinta od imperfettamente concoide ed attraversate da vene di varia grandezza di magnetite, che si trova pure disseminata in impregnazioni diffuse, in noduli ed in accentramenti.

All'esame microscopico invece appare immediatamente la loro vera natura mineralogica di pirosseniti formatesi a spese

(1) A queste rocce porfiriche sono anche da riferirsi alcune rocce porfiriche del giacimento di Brosso indicate localmente, non si sa perchè, col nome di *quarziti dei giacimenti piritosi*. Esse differiscono solo dalle altre per il loro molto più avanzato stato di alterazione.

Digitized by Google

di preesistenti masse calcaree, talvolta ancora riconoscibili, malgrado la loro spesso avanzata trasformazione in serpentino, rimanendo sempre tracce visibili del primitivo pirosseno, costituito anche in questi casi da termini diopsidici e meno frequentemente da fassaite.

Riguardo al processo di serpentinizzazione si nota che in un primo tempo il pirosseno passò ad anfibolo, che nei casi di alterazione parziale avvolse i cristalli di pirosseno e penetrò nel loro interno seguendo i piani di sfaldatura. In un secondo tempo questo anfibolo passò a serpentino.

Nella figura 1ª della tavola è rappresentata con un ingrandimento di 50 diametri una sezione di dette pirosseniti vista a luce naturale ed in essa appare evidente il predetto processo di serpentinizzazione, in seguito al quale i residui dei preesistenti cristalli di pirosseno appariscono sotto forma di granuli privi di contorni definiti, avvolti, tanto quando sono liberi quanto nei casi in cui sono inclusi nella magnetite, da una sostanza incolora fibrosa costituita da serpentino.

Dal modo poi in cui si presenta la magnetite nella massa della roccia e tenendo conto specialmente del fatto che anche quando è incluso nella magnetite, il pirosseno appare serpentinizzato al pari di quanto avviene negli altri punti della roccia, si deduce che la comparsa della magnetite non dovette avvenire nel primo tempo dei fenomeni di metamorfismo, cioè quando si originarono le pirosseniti, ma bensì nel secondo tempo quando in queste si iniziò il processo di serpentinizzazione.

La differenza poi essenziale che si ha fra le pirosseniti di Riondello e quelle di Castiglione, oltre alla mancanza in queste ultime del granato e della speziaite, è data dalla presenza in queste della magnetite, il che non si verifica mai nelle zone equivalenti del giacimento di Riondello, dove la magnetite è sempre contenuta nei calcari più o meno modificati.

Fatti analoghi si osservano nelle rare anfiboliti pure serpentinizzate, che si riconoscono facilmente dalle pirosseniti per il colore più chiaro, tendente al grigiastro, delle rispettive masse serpentinose e per la loro evidente struttura a grandi intrecci di fibre.

Digitized by Google

Le masse dei carbonati che, come dissi, debbono a Castiglione considerarsi come i rappresentanti delle preesistenti masse calcaree hanno caratteri strutturali e mineralogici varianti col variare del loro colore.

Quelle di tinta molto chiara, bianche o grigiastre, hanno una struttura granulare e compatta, ed in esse si nota esclusivamente la presenza di un minerale in piccole laminette bianche, leggermente untuose al tatto e disseminate uniformemente nella loro massa. Questo minerale che doveva inizialmente essere costituito da una mica, appare ora come un prodotto intermedio fra la mica ed il talco. Le dette masse sono in generale povere in ferro e sono quindi da considerarsi come ultimi residui di preesistenti masse calcaree sottoposte ad un debole metamorfismo.

Quelle di tinta gialla o gialla brunastra rappresentano invece tipi molto ricchi in ferro, i quali, come già dissi, possono anche giungere alla pura siderite. Esse non hanno più struttura compatta, presentando invece l'aspetto di aggregati di romboedri deformati intimamente associati e fortemente compressi, con frequenti vani che dànno origine a piccole geodi le cui pareti sono tappezzate dalle estremità dei predetti romboedri. Tutte contengono abbondantissima clorite in laminette verdi non disseminate uniformemente nella loro massa, ma bensì associate e riunite in accentramenti in diretto rapporto colle precitate geodine.

Nei termini non molto ricchi di ferro, oltre alla clorite, non si hanno che scarsi e microscopici cristalli di pirite e di quarzo, sempre associati alla clorite. Nei termini invece più ricchi in ferro si ha pure, sempre associata alla clorite, la magnetite in granuli ed in cristalli microscopici talora anche assai abbondanti.

Si può quindi ammettere che questi varî tipi di carbonati ricchi in ferro rappresentino altrettanti stadi differenti di modificazione dei calcari preesistenti, i quali, in seguito ad azioni progressivamente più intense di carattere idatogenico, abbiano dato origine a tipi gradatamente più ricchi in ferro, nei quali quindi dapprima si sarebbe formata solo clorite ed in seguito quando il ferro fu in eccesso, anche la magnetite.

Digitized by Google

Considerate dal lato puramente mineralogico appare chiaramente da quanto ho detto, che queste masse di carbonati non presentano un grande interesse. In un solo caso ho avuto occasione di esaminare alcuni esemplari di un carbonato ricchissimo in ferro che presentava un certo interesse per la sua maggiore ricchezza in minerali e per alcuni speciali caratteri di taluni fra questi. In essi infatti, oltre alla clorite, alla pirite, al quarzo ed alla magnetite, constatai la presenza della calcopirite, del rutilo e di un minerale che, per quanto dubitativamente, supposi potersi riferire alla ottaedrite. Tutti questi minerali erano, al pari degli altri, associati alla clorite.

Per quanto riguarda la clorite, la pirite e la magnetite non trovai nulla di nuovo; così pure nulla vi è da accennare rispetto alla calcopirite che si presentava in granuli informi. Il rutilo è degno di nota per il fatto che non fu mai trovato in altri punti dei giacimenti di Traversella, mentre invece appare in grandi cristalli in zone molto prossime ad essi; negli esemplari a cui accenno esso si presentava in gruppi poligeminati serpentini di piccolissimi cristalli di color nero e dotati di vivissima lucentezza adamantina; in essi mi fu possibile ad occhio di riconoscere la presenza dei due prismi tetragonali, di un prisma ditetragonale e di due bipiramidi che per le loro posizioni ed inclinazione sembravano doversi riferire alla $\{111\}$ ed alla $\{101\}$.

Associata al rutilo, ma molto più scarsa di esso, osservai una sostanza in granuli ed in incompleti frammenti di cristalli di color giallo a giallo-ranciato, avente una durezza ed un peso specifico pressochè uguali a quelli del rutilo. Essa era birifrangente e mi diede esclusivamente la reazione del titanio. Per quanto dubitativamente io la riferii alla ottaedrite perchè fra i cristalli incompleti ebbi modo di osservarne uno che sembrava costituito da una bipiramide tetragonale molto acuta ampiamente smussata da un pinacoide basale imperfetto per la presenza di tremie.

Anche il quarzo presentava nei detti esemplari alcuni interessanti caratteri. Infatti notai che spesso i suoi cristalli, sebbene sempre piccolissimi, presentavano forme a clava ed a manubrio,

Digitized by Google

come si vede in due di quelli riprodotti nella figura 3ª della tavola con un ingrandimento di 15 diametri; tali forme, unite al fatto che le estremità ingrossate apparivano nitide e lucenti, mentre invece le parti centrali si mostravano corrose, mi lasciarono supporre che essi siano stati sottoposti a fenomeni di corrosione ed a successivi fenomeni di rigenerazione manifestatisi alle loro estremità.

Questi cristalli di quarzo erano anche interessanti sotto un altro punto di vista. Invero io notai pure che spesso essi formavano dei gruppi i quali in alcuni casi, come appare dai due riprodotti al centro della già citata figura, assumevano l'aspetto di veri geminati. Ed anzi, poichè anche il già citato cristallo a manubrio portava ad una delle sue estremità rigenerate un piccolo subindividuo in posizione di geminato, si sarebbe tratti a supporre che la tendenza alla comparsa della geminazione abbia incominciato od abbia continuato a manifestarsi durante i fenomeni di rigenerazione. Debbo però far notare come, date le minime dimensioni dei cristalli e date le loro imperfezioni, non mi fu possibile di stabilire con sicurezza se si trattava di veri geminati oppure solo di forme vicine, per quanto la loro regolarità militi piuttosto in favore della prima di queste ipotesi.

Lungo i confini del giacimento di Castiglione con gli schisti cristallini si hanno frequenti litoclasi che si prolungano attraverso a questi ultimi e che presentano talvolta un alto interesse mineralogico, sebbene contengano solamente cristalli di calcite e di quarzo. Basta a questo proposito rammentare che è da taluna di esse che provennero i geminati di calcite e di quarzo ampiamente descritti da Q. Sella (1) nelle sue classiche ricerche sui geminati pubblicate nel 1856.

In alcune di queste litoclasi contenenti ambedue i predetti minerali, le pareti sono tappezzate dai cristalli di quarzo ai quali spesso aderiscono i cristalli scalenoedrici di calcite con dimensioni che non superano mai i 10 o 12 millimetri. Ora

(1) Q. Sella, *Studi sulla mineralogia sarda*, " Mem. della R. Accademia delle Scienze di Torino „, Serie II, Tomo XVII (1856).

Digitized by Google

talvolta in dette litoclasi osservai che i cristalli di calcite erano sostituiti da altri i quali, pur mantenendo interamente il primitivo abito scalenoedrico, corrispondevano chimicamente ad un idrossido di ferro avente una composizione chimica molto prossima a quella della goethite, che si sarebbe quindi formata per un processo di pseudomorfosi avente nulla di eccezionale in un ambiente quale è quello di Traverselle. Ciò che però era degno di nota si è che i cristalli pseudomorfi di goethite non raggiungevano mai le dimensioni massime dei preesistenti cristalli di calcite, mantenendosi anzi nei limiti di quelli più piccoli, come se solamente questi ultimi fossero stati capaci di trasformarsi in goethite.

Ora la spiegazione di questo fatto mi apparve chiaramente in seguito all'esame di alcune di queste litoclasi ancora percorse dall'acqua, poichè potei constatare che in esse i cristalli pseudomorfi non solo avevano dimensioni uguali a quelle dei cristalli di calcite, ma pur anche apparivano molto più ricchi in acqua di quelli a cui ho prima accennato, il che li rendeva pastosi invece che friabili, come invece si mostravano quelli di goethite.

Si può quindi supporre che in queste litoclasi la limonite abbia sostituito la calcite, senza dar luogo a variazioni nelle dimensioni dei cristalli pseudomorfi, e che solo posteriormente per un progressivo processo di disidratazione si sia verificata in questi una graduale contrazione di volume, che però non avrebbe per nulla influito sulla forma dei cristalli, i quali quindi avrebbero gradatamente assunto dimensioni sempre minori fino a quando il processo di disidratazione avrebbe avuto termine. Ed anzi potei facilmente riprodurre tale fatto sperimentalmente lasciando per lungo tempo alcuni dei predetti cristalli pastosi di limonite in un ambiente secco. In tali condizioni infatti io potei constatare che si avverò quanto ho innanzi accennato e che la contrazione di volume ed il processo di disidratazione si arrestarono quando appunto i cristalli pseudomorfi raggiunsero una composizione chimica corrispondente a quella della goethite, che rappresentava quindi lo stato di equilibrio corrispondente all'estremo loro limite di disidratazione.

Digitized by Google

III.

Il diretto contatto che in alcune parti del giacimento di Castiglione esiste fra le rocce del massiccio e le formazioni metamorfiche ha dato origine ad alcuni interessanti fenomeni di mineralizzazione che si possono chiamare inversi, perchè sono dovuti ad infiltrazioni le quali penetrarono nella massa già consolidata delle rocce dioritiche provenendo dalle zone metamorfiche-metallifere per opera dei medesimi agenti che diedero origine alla comparsa in queste ultime della maghetite.

Un interessante esempio di questi fenomeni fu da me osservato in alcuni esemplari di diorite provenienti dalle zone esterne del massiccio, nei quali si osservavano alcune impregnazioni di magnetite che penetravano nel loro interno per un certo tratto, modificandone sensibilmente la struttura.

Premetto che le dioriti di Castiglione mantengono integralmente i caratteri che io considerai come proprii dei termini più diffusi e normali, per cui anche in esse sono visibili i già da me descritti fenomeni di corrosione dei plagioclasi per opera di una intrusione posteriore di un magma ortosico proveniente da grande profondità e che si diffuse nella massa delle dioriti.

Le impregnazioni a cui intendo di accennare apparentemente presentavano due tipi molto differenti, poichè, mentre in alcuni casi esse si riducevano ad un semplice arricchimento in magnetite disposta in letti paralleli dello spessore di pochi centimetri, senza che la struttura della roccia apparisse modificata sensibilmente, in altri casi invece esse assumevano l'aspetto di masse nere, compatte, attraversanti la roccia come veri strati. In ambedue i casi poi notai che da esse si passava rapidamente alla roccia normale.

Dall'esame microscopico di una serie di sezioni provenienti da vari punti delle predette impregnazioni, dalle più povere in magnetite alle più ricche, risultò che tanto le une quanto le altre dovettero manifestarsi dopo la completa consolidazione delle dioriti, in conseguenza di un fenomeno di infiltrazione

Digitized by Google

proveniente dall'esterno e dovuto alle medesime cause che determinarono la comparsa della magnetite nelle pirosseniti e nelle anfiboliti. Infatti potei constatare che i due tipi di impregnazione differivano l'uno dall'altro soltanto per la intensità del fenomeno che in ambedue i tipi portò alla sostituzione della magnetite alle masse allotriomorfe di ortosio a cui è dovuta la corrosione dei cristalli di plagioclasio.

Ed anzi a questo proposito ho notato non solo come tale sostituzione sia avvenuta esclusivamente a spese delle masse allotriomorfe di ortosio e non dei cristalli di plagioclasio, ma pur anche come intorno a questi ultimi ed in perfetto isorientamento con essi si sia depositata una sostanza di nuova formazione, di natura plagioclasica, tendente a risanare le loro corrosioni ed a ricostituirne quindi le forme iniziali ; questa sostanza poi appariva dotata di un grado di acidità superiore a quella dei cristalli inclusi, essendo rappresentata da termini oligoclasici molto ricchi in sodio ed anche direttamente da albite.

Notevole poi era il fatto pure da me osservato che le lamelle di geminazione visibili in essa si comportavano esattamente come la continuazione di quelle visibili nei cristalli inclusi, sebbene, in causa del diverso grado di acidità, si estinguessero sotto angoli diversi.

Nelle figure 2ª, 4ª, 5ª della tavola sono riprodotte tre sezioni che dànno modo di riconoscere i predetti caratteri. Nella figura 2ª si ha un grande cristallo di plagioclasio zonato che si spezzò in più parti, anche spostate, per l'azione della intrusione dell'ortosio il quale penetrò anche nel suo interno e, come appare chiaramente, la magnetite, non solo si sostituì parzialmente alla circostante massa ortosica, ma pur anche penetrò nell'interno del cristallo. Nelle due figg. 4ª e 5ª sono riprodotti due cristalli corrosi di plagioclasio lungo il cui contorno è perfettamente visibile la sostanza di nuova formazione che tende a ricostituirne i contorni. Nella prima la tendenza alla detta ricostituzione è evidentissima e si vedono in essa distintamente alcune lamelle di geminazione secondo la legge dell'albite che si saldano completamente a quelle che si hanno nelle zone esterne del cristallo incluso. Nella figura 5ª si nota lo stesso fatto,

Digitized by Google

avendosi in essa un cristallo (quello che si vede al centro) il quale presenta due parti centrali più illuminate, rappresentanti il residuo della corrosione dovuta all'ortosio, che si mostrano inferiormente avvolte da alcuni strati successivi di un plagiocasio di nuova formazione più acido, le cui lamelle di geminazione formano la esatta continuazione di quelle molto fitte visibili nei frammenti centrali.

Genova, Istituto di Mineralogia, giugno 1929 (VII).

Digitized by Google

Studio cristallografico dell'Epidoto del Giassett in Val d'Ala (Piemonte).

Nota della Dott.ssa ELSA DEBENEDETTI
presentata dal Socio nazionale residente Emilio Repossi.

Sul lato settentrionale della val d'Ala, cioè sul versante opposto a quello dove si trovano i famosi giacimenti di epidoto del Paschietto, di Saulera e di Rocca Nera, si è trovato, vicino alla Testa Ciarva dove l'epidoto è rarissimo, un nuovo giacimento di epidoto, quello del Giassett. Esso fu descritto, alcuni anni fa, dal prof. Repossi.

" Il giacimento si raggiunge salendo dalle alpi del Giassett chiamate per antonomasia con questo nome e collocate ad occidente della Testa Ciarva, sullo sfondo del Pian della Mussa, verso le Alpi di Ciamarella. A meno di metà della salita, dove il sentiero attraversa il torrentello, s'incontrano nella prasinite alcuni banchi di epidoto, e non raramente questi presentano litoclasi, colle pareti ricoperte di cristalli.

" La roccia, in vicinanza dei litoclasi, si arricchisce di granato e di albite ed assume una tessitura più compatta. La calcite in uno dei banchi riempie parzialmente i litoclasi, investendo i cristalli impiantati sulle pareti, che si liberano solo asportando con acido il minerale involgente. Il giacimento è ricco e ha già dato buon numero di eleganti esemplari. I cristalli di epidoto, addossati l'uno all'altro in croste fitte ed irregolari, sono ordinariamente non molto grandi, superando di rado pochi millimetri di diametro, ma sono belli e brillanti. Il loro colore è giallo-verde, o verde-bruno chiaro; talvolta la tinta passa al bruno più deciso. Spesso sono perfettamente limpidi e trasparenti, specie i più piccoli „.

Digitized by Google

Le forme trovate dal prof. Repossi sono le seguenti:

$$\{100\}\ \{201\}\ \{101\}\ \{102\}\ \{20\bar{1}\}\ \{10\bar{1}\}\ \{10\bar{2}\}\ \{011\}\ \{001\}$$

$$\{111\}\ \{11\bar{1}\}\ \{22\bar{1}\}\ \{213\}.$$

Poichè in questi ultimi tempi si è venuti in possesso di materiale molto più abbondante, si è creduto opportuno di riprendere lo studio di questo epidoto, col materiale fornito in parte dal collezionista Dott. Crida e in parte dal Museo Mineralogico.

Tra i cristalli da me misurati si possono distinguere facilmente 2 tipi: al 1° appartengono la maggior parte dei cristalli; essi, simili a quelli già descritti dal prof. Repossi, sono di colore giallo-verde chiaro, di dimensioni variabili da 1 a 2 mm. Ve ne sono anche di più grandi, ma questi possiedono però un minor numero di facce. Essi sono raramente terminati alle due estremità, di solito impiantati per un'estremità dell'asse *y* e, abito eccezionale pel minerale, poco allungati in questa direzione. Nelle altre due direzioni sono quasi equidimensionali, qualche volta tabulari secondo $\{001\}$, qualche volta secondo $\{100\}$. Il 2° tipo è meno frequente, e potei misurarne solo due cristalli, di cui uno è geminato. Essi sono di colore verde più intenso. Il cristallo semplice ha abito più spiccatamente epidotico, ossia è allungato nella direzione dell'asse *y* e tabulare secondo $\{001\}$.

Molto frequenti sono anche i geminati secondo la solita legge dell'epidoto: asse di geminazione la normale a $\{100\}$. Quando non presentano angoli rientranti, essi non sono facilmente distinguibili dai cristalli semplici, per la mancanza della $\{010\}$, che, colla sua doppia striatura, caratteristica in geminati di altre località, ne agevolerebbe il riconoscimento.

I geminati sono in generale meno ricchi di forme, ad eccezione del geminato del 2° tipo, che è uno dei cristalli più ricchi. In alcuni di essi le due facce $\{001\}$ sono sviluppate e formano un angolo rientrante. In altri la $\{001\}$ è sviluppata solo in un individuo e forma un angolo *molto ottuso* colla $\{101\}$ dell'altro individuo.

Digitized by Google

Complessivamente le forme da me osservate sono 21:

$\}001\{$, $\}102\{$, $\}101\{$, $\}201\{$, $\}401\{$, $\}\bar{1}03\{$, $\}\bar{1}02\{$, $\}\bar{1}01\{$, $\}\bar{3}02\{$, $\}\bar{2}01\{$, $\}100\{$, $\}320\{$, $\}110\{$, $\}011\{$, $\}012\{$, $\}111\{$, $\}\bar{1}22\{$, $\}\bar{2}33\{$, $\}\bar{1}11\{$, $\}\bar{2}21\{$, $\}\bar{3}31\{$.

Descrizione delle singole zone.

Zona [100-010].

Le forme osservate sono: $\}100\{$, $\}320\{$, $\}110\{$.

Il pinacoide $\}100\{$ è una forma costante, in generale molto estesa, sovente stirata parallelamente a y.

Il prisma $\}320\{$ è una forma abbastanza rara e sempre lineare. Essa non è molto frequente neanche negli altri epidoti piemontesi. Dal La Valle non è stata trovata nei cristalli di val d'Ala. Essa è invece stata trovata dal Boeris in epidoti della valle di Ayas e dal Toborfty in epidoti della valle di Viù.

Il prisma $\}110\{$ è forma sempre presente e molto estesa; di solito dà belle imagini; raramente è striata parallelamente allo spigolo di combinazione colla $\}\bar{2}21\{$.

La $\}010\{$ non è mai stata osservata.

Zona [010-001].

Le forme osservate sono: $\}011\{$, $\}012\{$, $\}001\{$.

La $\}011\{$ è abbastanza frequente, di solito piccola, ma molto brillante, e dà sempre belle imagini al goniometro. Nel 2° tipo questa forma è molto più grande e bella.

La $\}012\{$ accompagna sovente la $\}011\{$, ma è sempre lineare.

Il pinacoide $\}001\{$ è forma costante, in generale molto estesa, però brutta, non molto brillante e qualche volta striata parallelamente a y.

Zona [100-001].

Le forme osservate sono: $\}100\{$, $\}401\{$, $\}201\{$, $\}101\{$, $\}102\{$, $\}001\{$, $\}\bar{1}03\{$, $\}\bar{1}02\{$, $\}\bar{1}01\{$, $\}\bar{3}02\{$, $\}\bar{2}01\{$.

Digitized by Google

Tutte le facce di questa zona sono quasi sempre striate a y e dànno in generale imagini multiple al goniometro.

Di questi pinacoidi, oltre $\{100\}$ e $\{001\}$ già descritti, sono frequentissimi $\{101\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{\bar{1}02\}$.

La $\{401\}$ e la $\{\bar{3}02\}$ sono state trovate una volta sola in uno stesso cristallo (del 2° tipo). Così pure la $\{201\}$ e la $\{\bar{1}03\}$ sono state trovate una volta sola nell'altro cristallo del 2° tipo. Queste quattro facce sono tutte appena lineari e hanno dato imagini confuse, quantunque sicuramente determinabili. Le $\{102\}$ e $\{\bar{2}01\}$ sono abbastanza frequenti, ma anch'esse lineari: la $\{\bar{2}01\}$ in un solo cristallo è apparsa grande.

Zona [110-001].

Le forme osservate sono: $\{001\}$, $\{111\}$, $\{110\}$, $\{33\bar{1}\}$, $\{22\bar{1}\}$, $\{11\bar{1}\}$.

La $\{111\}$ è meno frequente della $\{\bar{1}11\}$ e, specialmente nei cristalli del 2° tipo, è notevole il maggior sviluppo di quest'ultima, che appare come la forma dominante all'estremità del cristallo. Questa osservazione è già stata fatta dal La Valle per gli epidoti della Val d'Ala ed anche da altri per gli epidoti delle valli di Ayas e Viù.

La $\{\bar{2}21\}$ è sempre presente colla $\{\bar{1}11\}$. Di solito è grande e striata parallelamente allo spigolo di combinazione colla $\{110\}$. Nei cristalli del 2° tipo è invece strettissima e lunga.

La $\{331\}$ è presente solo in qualche geminato, è grande, ma sempre molto striata, insieme alla $\{\bar{2}21\}$ e nello stesso senso di questa.

[Zona 100-011].

Le forme osservate sono: $\{100\}$, $\{111\}$, $\{011\}$, $\{\bar{1}23\}$, $\{\bar{2}33\}$, $\{\bar{1}11\}$.

Oltre alle 4 già descritte, abbiamo le due forme $\{\bar{1}22\}$ e $\{\bar{2}33\}$, trovate in un solo cristallo, e cioè nel più ricco del 2° tipo. Esse sono grandi e molto striate parallelamente allo spigolo di combinazione della $\{011\}$ e $\{\bar{1}11\}$ rispettivamente. Queste due forme, rare in questo epidoto, sono abbastanza fre-

Digitized by Google

quenti negli epidoti piemontesi e, in particolare, in quelli di Val d'Ala.

A queste forme ora descritte si potrebbe aggiungere come incerta una forma $\}hkl\{$ che si trova all'incrocio delle due zone [111-$\bar{1}$10] e [$\bar{1}$01-110].

Il simbolo (132), calcolato per questa forma, è discretamente in accordo colle misure fatte, a bagliore, nelle due zone:

	misurati	calcolati
(111) : (132)	20°,58′	20°,32′
(132) : ($\bar{1}$10)	58°,37′	59°,15′
(110) : (132)	22°,59′	22°,40 $^1/_2$′
(132) : (011)	11°,35′	11°,34 $^1/_2$′.

Questa faccia è però stata trovata una volta sola. La $\}132\{$ sarebbe nuova per l'epidoto.

Due combinazioni di forme, frequenti per i cristalli del 1° tipo, sono le seguenti:

I. $\}001\{$, $\}100\{$, $\}102\{$, $\}101\{$, $\}\bar{1}02\{$, $\}\bar{1}01\{$, $\}\bar{2}01\{$, $\}110\{$, $\}320\{$, $\}011\{$, $\}012\{$, $\}111\{$, $\}\bar{1}11\{$, $\}\bar{2}21\{$.

II. $\}001\{$, $\}100\{$, $\}101\{$, $\}110\{$, $\}011\{$, $\}\bar{1}11\{$, $\}\bar{2}21\{$.

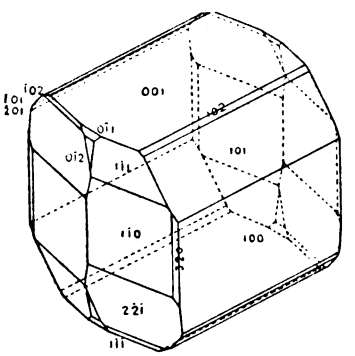


Fig. 1.

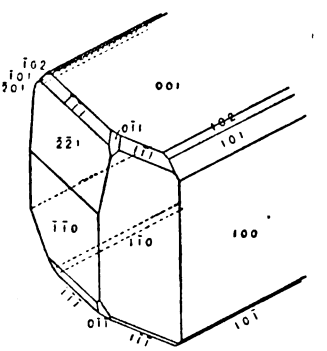


Fig. 2.

In questi sono da notare come forme predominanti oltre le $\{100\{$ e $\}001\{$ anche le $\}110\{$, $\}\bar{1}11\{$ e $\}221\{$. A questo tipo si riferiscono le figure 1 e 2.

Digitized by Google

Il cristallo semplice del 2° tipo ha la seguente combinazione di forme:

$$\{001\},\ \{100\},\ \{102\},\ \{101\},\ \{201\},\ \{\bar{1}03\},$$
$$\{\bar{1}02\},\ \{\bar{1}01\},\ \{\bar{2}01\},\ \{110\},\ \{011\},\ \{012\},$$
$$\{111\},\ \{\bar{1}22\},\ \{\bar{2}33\},\ \{\bar{1}11\},\ \{\bar{2}21\}$$

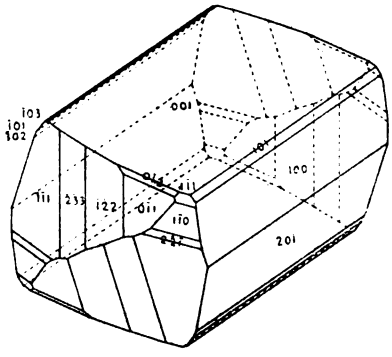


Fig. 3.

Una combinazione comune nei geminati è:

$$\{001\},\ \{100\},\ \{101\},\ \{\bar{1}01\},$$
$$\{110\},\ \{\bar{1}11\},\ \{\bar{2}21\},\ \{\bar{3}31\}$$

(Figure 4 e 5).

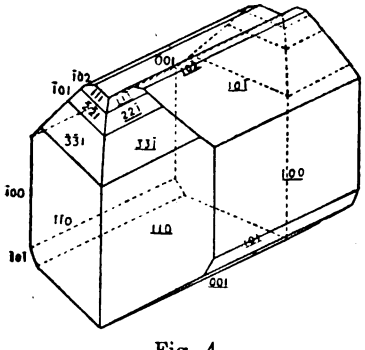


Fig. 4.

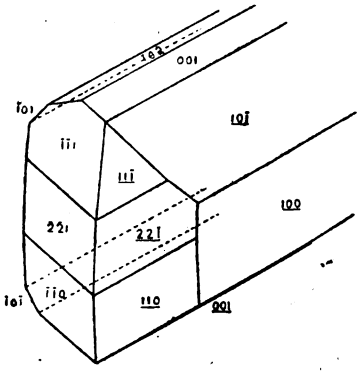


Fig. 5.

Digitized by Google

Per l'epidoto del Giassett, partendo dagli angoli migliori, si possono calcolare le costanti:

$$a : b : c = 1{,}57872 : 1 : 1{,}80978 ,$$

$$\beta = 64°{,}37'.$$

Siccome però esse non si differenziano molto dalle costanti di Kokscharow, usate comunemente, ho creduto bene di usare queste ultime per il calcolo degli angoli, qui avanti riportati.

Come abbiamo visto, l'epidoto del Giassett si può riportare, quanto a giacitura, agli altri della val d'Ala e, in generale, delle pietre verdi.

Per quanto riguarda l'abito, i cristalli del 1° tipo hanno qualche rassomiglianza con quelli più semplici del Paschietto, della Val di Viù ed anche dell'Ossola; i cristalli del 2° tipo invece presentano una somiglianza notevole più con quelli della Bettolina, in val d'Ayas, che cogli altri della val d'Ala.

Digitized by Google

Angolo	Calcolato	Media	Limiti dell'osservazione	N.
(001) : (102)	22°, 31′	22°, 23′ 1/2	22°, 21′ — 22°, 25′	2
(102) : (101)	12°, 12′	12°, 17′ 1/2	12°, 13′ — 12°, 22′	2
(001) : (101)	34°, 43′	34°, 44′	34°, 26′ — 34°, 59′	5
(101) : (201)	11°, 29′	11°, 37′	—	1
(201) : (100)	18°, 25′	18°, 10′	—	1
(101) : (401)	19°, 39′	19°, 2′	—	1
(401) : (100)	10°, 15′	10°, 47′	—	1
(101) : (100)	29°, 54′	29°, 49′	29°, 33′ — 30°, 2′	5
(001) : (100)	64°, 37′	64°, 37′	64°, 30′ — 64°, 56′	3
(001) : ($\bar{1}$03)	22°, 21′	21°, 32′	—	1
($\bar{1}$03) : ($\bar{1}$01)	41°, 21′	41°, 46′	—	1
(001) : ($\bar{1}$02)	34°, 21′	34°, 19′	34°, 7′ — 34°, 30′	6
($\bar{1}$02) : ($\bar{1}$01)	29°, 21′	29°, 24′	29°, 10′ — 29°, 37′	4
(001) : ($\bar{1}$01)	63°, 42′	63°, 50′	—	1
($\bar{1}$01) : ($\bar{3}$02)	16°, 35′	16°, 37′	—	1
(302) : ($\bar{1}$00)	35°, 7′	35°, 7′	—	1
($\bar{1}$01) : ($\bar{2}$01)	25°, 44′ 1/4	25°, 44′	25°, 33′ — 25°, 55′	4
($\bar{2}$01) : ($\bar{1}$00)	25°, 57′ 1/4	26°, 1′	25°, 51′ — 26°, 17′	4
($\bar{1}$01) : ($\bar{1}$00)	51°, 41′ 1/2	51°, 51′ 1/2	51°, 39′ — 52°, 2′	5
(001) : (012)	39°, 10′	39°, 21′	39°, 7′ — 39°, 30′	5
(012) : (011)	19°, 17′ 1/2	19°, 17′	19°, 6′ — 19°, 27′	5
(001) : (011)	58°, 27′ 1/2	58°, 33′	58°, 23′ — 58°, 40′	5
(100) : (320)	43°, 33′ 1/2	43°, 36′	43°, 31′ — 43°, 41′	3
(320) : (110)	11°, 24′ 1/2	11°, 24′	11°, 18′ — 11°, 32′	3
(100) : (110)	54°, 58′	54°, 58′	54°, 47′ — 55°, 4′	6
(001) : (111)	52°, 19′	52°, 19′	52°, 15′ — 42°, 24′	6

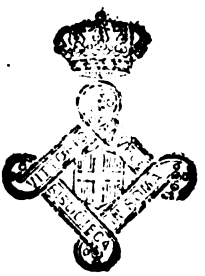
Digitized by Google

Angolo	Calcolato	Media	Limiti dell'osservazione	N.
(111) : (110)	23°, 26′	23°, 29′	23°, 22′ — 23°, 34′	6
(001) : (110)	75°, 45′	75°, 45′	75°, 40′ — 76°, 8′	6
(001) : ($\bar{1}$11)	75°, 11′	75°, 11′	75° — 75°, 24′	12
($\bar{1}$11) : ($\bar{2}$21)	14°, 31′	14°, 31′	14°, 19′ — 14°, 47′	12
($\bar{2}$21) : ($\bar{3}$31)	4°, 56′ 1/2	5°, 6′	4°, 43′ — 5°, 30′	2
($\bar{3}$31) : ($\bar{1}$10)	9°, 36′ 1/2	8°, 39′	8°, 25′ — 8°, 53′	2
($\bar{2}$21) : ($\bar{1}$10)	14°, 33′	14°, 29′	14°, 17′ — 14°, 52′	14
(100) : (111)	49°, 51′ 1/2	49°, 49′	49°, 37′ — 49°, 59′	3
(111) : (011)	27°, 11′	27°, 25′	27°, 8′ — 27°, 59′	3
(100) : (011)	77°, 2′ 1/2	77°, 0′, 30″	77° — 77°, 1′	2
(011) : ($\bar{1}$22)	17°, 20′	17°, 32′	17°, 11′ — 17°, 53′	2
($\bar{1}$22) : ($\bar{2}$33)	5°, 45′ 1/2	5°, 22′	4°, 44′ — 6°	2
($\bar{2}$33) : ($\bar{1}$11)	10°, 50′	11°, 2′	10°, 46′ — 11°, 19′	2
(011) : ($\bar{1}$11)	33°, 55′ 1/2	33°, 46′	33°, 38′ — 33°, 55′	2
($\bar{1}$11) : ($\bar{1}$00)	69°, 2′	69°, 6′	69°, 4′ — 69°, 15′	4
(001) : (10$\bar{1}$)	50°, 46′	50°, 16′	49°, 35′ — 50°, 57′	2
(10$\bar{1}$) : ($\bar{1}$01)	76°, 38′	76°, 30′	76°, 27′ — 76°, 33′	2
(0$\bar{1}$1) : (01$\bar{1}$)	25°, 55′	25°, 56′	—	1
(1$\bar{1}$0) : ($\bar{1}$10)	70°, 4′	69°, 59′	69°, 23′ — 70°, 28′	3
(1$\bar{1}\bar{1}$) : ($\bar{1}$11)	41°, 56′	41°, 55′	41°, 43′ — 42°, 2′	5
(2$\bar{2}\bar{1}$) : ($\bar{2}$21)	57°, 31′	57°, 14′	57°, 5′ — 57°, 23′	2

Istituto Mineralogico della R. Università di Torino.
Giugno 1929 (VII).

L'Accademico Segretario
EMILIO REPOSSI.

Digitized by Google



Digitized by Google

INDICE

DEL VOLUME LXIV

Elenco degli Accademici Nazionali residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 31 dicembre 1928 . . *Pag.* III

Presidenti della Reale Accademia delle Scienze di Torino dalla sua fondazione . . . . . » V

Mutazioni avvenute nel Corpo accademico dal 1° gennaio al 31 dicembre 1927 . . . . . » XXIII

Relazione Premio Vallauri (1923-26) . . . . . » 210

Relazione della Commissione per il Premio di fondazione Gautieri - Storia (1925-1927) . . . . . » 266

Relazione della Commissione per il Premio di fondazione Gautieri - Filosofia (1924-1926) . . . . . » 274

Adunanze:

Sunti degli Atti verbali della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali . . . . . » 1, 46, 56, 66, 68, 95, 104, 144, 188, 217, 244, 262, 282, 316.

Sunti degli Atti verbali delle Classi Unite . . . . . » 43, 208, 210, 242, 279, 280, 314.

Albenga (Giuseppe). — A proposito di qualche formola approssimata per la trave inflessa e sollecitata assialmente . . . . » 235

Aliverti (G.). — Misure di radioattività atmosferica . . . » 97

Amerio (A.), De Pasquale (O.), Ricca (V.). — Misure pireliometriche eseguite sull'Aspromonte . . . . . » 159

Boccalatte (Cesarina). — La Geometria basata sulle idee di punto e angolo retto . . . . . » 47

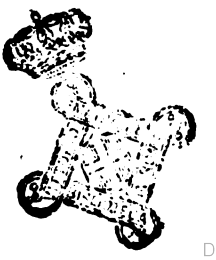
Burali-Forti (C.). — Una prima questione di balistica esterna » 146

Cibrario (Maria). — Proposizioni universali e particolari, e definizione di limite . . . . . » 319

Colomba (Luigi). — Osservazioni litologiche e mineralogiche sul giacimento di Castiglione (Traversella) . . . . . » 373

Digitized by Google

Colombo (Bonaparte). — Sulla propagazione delle onde sismiche in uno strato piano illimitato . . . . . *Pag.* 58
Colucci (Antonio). — Trattazione in grande del problema dei valori iniziali per le equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti . . . . . » 219
Debenedetti (Elsa). — Studio cristallografico dell'Epidoto del Giassett in Val d'Ala (Piemonte) . . . . . » 385
Ferrari (Carlo). — Sull'analogia fra i campi elettrici e i campi aerodinamici . . . . . » 190
Gennaro (Virginia). — Thomsonite e Scolecite dell'alta Valle di Ayas e delle Valli di Lanzo . . . . . » 133
Giua (Michele). — Ricerche sopra alcune reazioni di condensazione » 89
— e Racciu (Giovanni). — Ricerche sulla resinificazione. - I. Sulla condensazione dell'aldeide formica con l'uretano ordinario » 300
— — Influenza dei sostituenti sulla stabilità di alcuni composti ciclici . . . . . » 331
Grassi (Guido). — Sulla resistività dell'Alluminio . . . . » 248
Majorana (Quirino). — Attenuazione dissimmetrica di energia raggiante in un mezzo assorbente . . . . . » 359
Marseguerra (Vincenzo). — Sulle funzioni tayloriane . . . » 251
Mascarelli (Luigi). — Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati (e dei dinaftili, ecc.). Considerazioni sul grande numero di antipodi ottici privi di atomi asimmetrici, che ne possono derivare . . . . . » 31
Palazzo (A. M.). — Le lenticelle della radice del Morus . . » 197
Parona (C. F.). — Appunti per uno studio sulle *Spugne* del Permiano di Sicilia (Bacino del Sosio) . . . . . » 121
Pistolesi (Enrico). — Sul calcolo di resistenza delle eliche . » 283
Repossi (Emilio). — Studio mineralogico dei terreni agrari del Vercellese . . . . . » 335
Resegotti (Giuseppe). — Heulandite e Stilbite di Prascorsano presso Cuorgnè (Piemonte) . . . . . » 105
Sacco (Federico). — Nuovi dati di fatto riguardo l'età degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino . . . . . » 11
Somigliana (Carlo). — Sulla misura della Terra e la gravimetria » 4
Tonolo (Angelo). — Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dello spazio S_4 . . . . . » 69
Zoia (Raffaello). — Nuovo procedimento per studiare le variazioni della resistenza all'urto su barrette intagliate dovute al fenomeno dell'invecchiamento . . . . . » 35
Zuffardi-Comerci (Rosina). — La fauna pliocenica di Masserano-Cossato (Biellese) . . . . . » 305



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

Opere scelte di Amedeo Avogadro (per cura di I. Guareschi).

Torino, Unione tipografico-editrice torinese, 1911, 1 vol. in-4° (4 csn., CXL-492 pp., 1 ritr.).

Miscellanea di studi danteschi. ***Dante e il Piemonte.***

Torino, Fratelli Bocca editori, 1922, in-8° (VIII-648 pp.).

Digitized by Google

SOMMARIO

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 26 Maggio 1929 . *Pag.* 279
Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 9 Giugno 1929 . „ 280

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 9 Giugno 1929 . *Pag.* 282
Pistolesi (Enrico). — Sul calcolo di resistenza delle eliche . „ 283
Giua (Michele) e Racciu (Giovanni). — Ricerche sulla resinificazione. - I. Sulla condensaz. dell'aldeide formica con l'uretano ordinario „ 300
Zuffardi-Comerci (Rosina). — La fauna pliocenica di Masserano-Cossato (Biellese) . . . . . „ 305

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 16 Giugno 1929 . *Pag.* 314

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 23 Giugno 1929 . *Pag.* 316
Cibrario (Maria). — Proposizioni universali e particolari, e definizione di limite . . . . . „ 319
Giua (Michele) e Racciu (Giovanni). — Influenza dei sostituenti sulla stabilità di alcuni composti ciclici . . . . . „ 331
Repossi (Emilio). — Studio mineralogico dei terreni agrari del Vercellese . . . . . „ 335
Majorana (Quirino). — Attenuazione dissimmetrica di energia raggiante in un mezzo assorbente . . . . . „ 358
Colomba (Luigi). — Osservazioni litologiche e mineralogiche sul giacimento di Castiglione (Traversella) . . . . . „ 373
Debenedetti (Elsa). — Studio cristallografico dell'Epidoto del Giassett in Val d'Ala (Piemonte) . . . . . „ 385

Tip. Vincenzo Bona - Torino

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google